

El movimiento. Conceptos (I)

Cinemática: estudio del movimiento, sin atender a sus causas.

Conceptos:

- **Movimiento:** variación de la posición de un móvil con el tiempo. A la ausencia de movimiento se le llama “reposo”.
- **Móvil:** objeto del que se quiere estudiar el movimiento
 - >Aquí siempre lo consideramos puntual
 - >Aunque se use palabra “móvil”, puede estar en reposo.
- **Posición:** coordenadas de un móvil respecto de un sistema de referencia.
- **Sistema de referencia:** formado por origen y ejes que permiten definir posición.



El movimiento. Relatividad

Las definiciones de sistema de referencia y posición se citan entre ellas; ambas están relacionadas.

El movimiento es relativo; la posición varía según el sistema de referencia elegido.

Ejemplo: un objeto en el autobús está en reposo para los viajeros del autobús, pero en movimiento para alguien que lo ve desde fuera.

Lo que desde un sistema de referencia es reposo, desde otro es movimiento.

Esta es la relatividad de Galileo Galilei, no relatividad de Einstein.

En el estudio del movimiento con sistema de referencia y posición lleva a la idea de vectores, espacio y tiempo.

Las sistemas de referencia inerciales / no inerciales se ven al tratar las fuerzas en dinámica.



El movimiento. Conceptos (II)

El espacio y el tiempo son absolutos, e independientes entre sí.

Hay varios tipos de movimientos que manejan una o varias dimensiones en el espacio y sistema de referencia:

- Unidimensional (1 dimensión): movimiento en una recta
- Bidimensional (2 dimensiones): movimiento en el plano
- Tridimensional (3 dimensiones): movimiento en el espacio

En **1º Bachillerato** nos limitamos a 1 y 2 dimensiones, y en ciertas situaciones asumimos 1 dimensión asociada a la distancia recorrida.

Ejemplo: andamos por la Tierra que es una esfera 3D, pero asumiremos línea recta en 1 dimensión.



El movimiento. Conceptos (III)

Posición (magnitud vectorial): vector que va desde el origen de coordenadas hasta el móvil. Su módulo se mide en m. Origen de movimiento (posición inicial) no tiene por qué coincidir con origen de coordenadas.

Trayectoria: es la línea que describe un móvil en su movimiento / la línea que describe la posición.

Ejemplos: rectilínea, curvilínea (circular, [parabólica](#), ...)

La trayectoria no basta para definir el movimiento: además hace falta aclarar cómo se recorre. Ejemplo: circular en sentido agujas del reloj, línea AB hacia A ó hacia B.

En **1º Bachillerato** nos limitamos a trayectorias rectilínea, circular **y parabólica**, y en algunas situaciones no usamos vectores.

Desplazamiento (magnitud vectorial): vector diferencia entre dos posiciones. Su módulo se mide en m. Recordar Δ (“delta”) es “variación”
$$\Delta \vec{r} = r_{final}^{\vec{}} - r_{inicial}^{\vec{}}$$

Distancia recorrida (magnitud escalar): distancia recorrida sobre la trayectoria. Se mide en m. Siempre es positiva.



El movimiento rectilíneo

Podemos simplificar sin usar vectores, sino números con signo:

- Dirección viene dada por la recta que define el movimiento rectilíneo.
- Módulo viene dado por un valor numérico.
- Sentido viene dado por el signo.

Sistema de referencia: eje x , fijando origen $x=0$ y definiendo sentido positivo.

En $t=0$ (instante inicial) tenemos $x=x_0$.

- Posiciones serán positivas o negativas.
- Desplazamiento puede ser positivo o negativo.
- Distancia recorrida siempre es positiva. Se suele utilizar la letra s , y si no hay cambios de sentido $s=x-x_0$.

>Es importante tener en cuenta que $s=x$ solamente si $x_0=0$.

Ejemplos: calcular desplazamiento y distancia recorrida en varias situaciones



El movimiento en 1 dimensión

Aunque el movimiento no sea rectilíneo, a veces se trata como tal.

Cualitativamente es como si “desdoblamos la trayectoria” y la convertimos en una recta, que es nuestro eje x , de modo que manejamos espacio a recorrer sobre la trayectoria como coordenada de nuestro sistema de referencia.

Ejemplo: movimiento sobre una pista de atletismo, sobre una circuito de carreras, ...: solamente manejamos el espacio recorrido sobre la trayectoria (e), de modo que realmente no nos afecta en el tratamiento si es totalmente rectilíneo, aunque en este caso sí contemplamos signo asociado a avanzar o retroceder sobre la trayectoria, como en x .

Por ello muchas veces se habla más de e que de x , aunque hay que recordar que no son lo mismo; s es similar a e , pero e tiene signo.



Gráficas x-t y e-t (I)

Para representar movimientos es habitual representar de manera gráfica la variación de una magnitud con el tiempo.

En las gráficas e-t se representa tiempo en eje horizontal y el espacio recorrido sobre la trayectoria en el eje vertical.

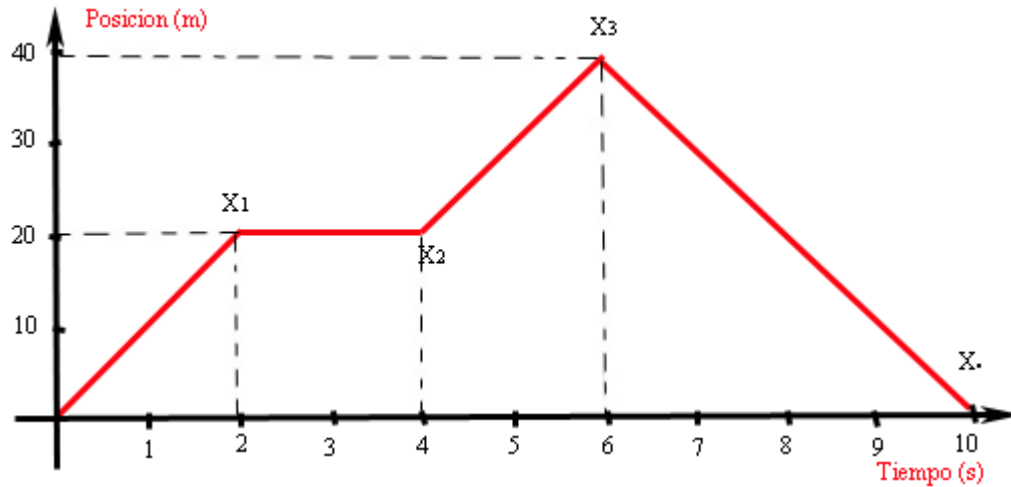
La gráfica es una línea; no confundirla con la trayectoria

En la gráfica e-t retroceder es ir hacia la derecha y hacia abajo

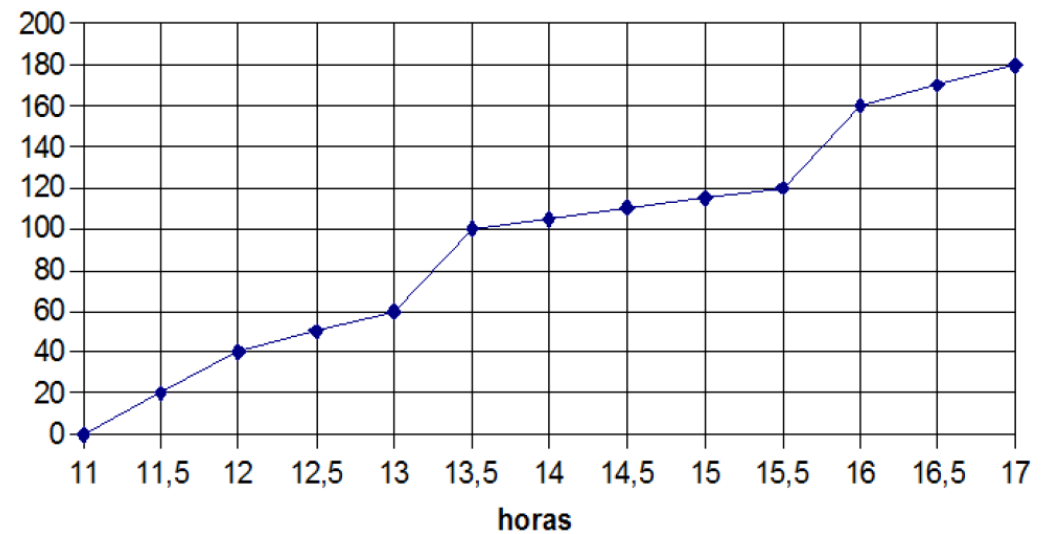
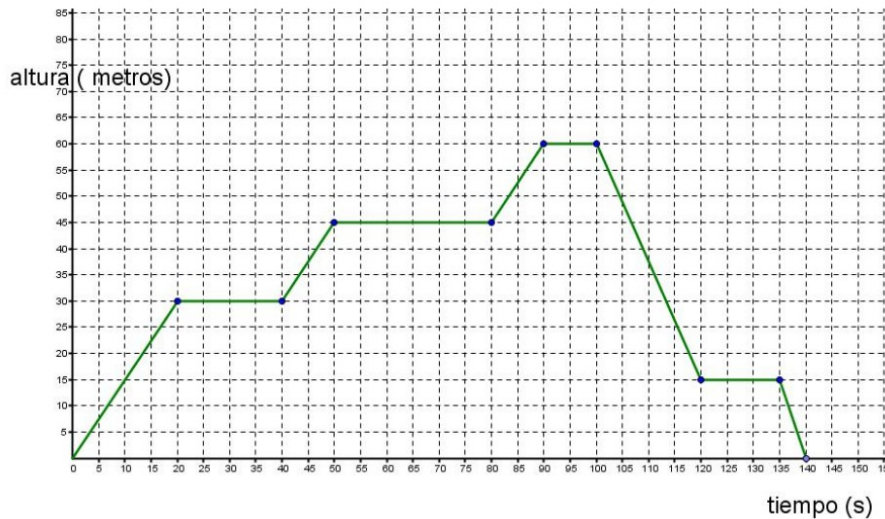
- Tramo horizontal: pasa tiempo y no varía posición = parado
- Tramo inclinado hacia arriba: aumenta posición = avanza
- Tramo inclinado hacia abajo: disminuye posición = retrocede
- A mayor inclinación, mayor variación de posición (enlaza con la idea de velocidad)



Gráficas x-t y e-t (II)



<http://darwin-milenium.com/Estudiante/Fisica/Temario/Tema2.htm>



Velocidad

Velocidad (magnitud vectorial): medida de la variación de la posición. Unidades del módulo en SI: m/s (recordar cambios unidades)

Celeridad (magnitud escalar): medida de la rapidez con la que varía la distancia recorrida sobre la trayectoria. Unidades SI: m/s

Velocidad media:

-Depende intervalo de tiempo.

-Puede ser cero aunque haya movimiento.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea: velocidad si consideramos tiempo muy breve, “un instante” (**matemáticamente se usa derivada, se introduce aquí**).

-Módulo es la celeridad (instantánea)

-Dirección y sentido tangente a trayectoria.

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt}$$



Gráficas v-t

Relacionadas con gráficas e-t (y más adelante con a-t), pero es importante distinguirlas: siempre indicar magnitud en los ejes.

En las gráficas v-t se representa t en eje horizontal y v en vertical.

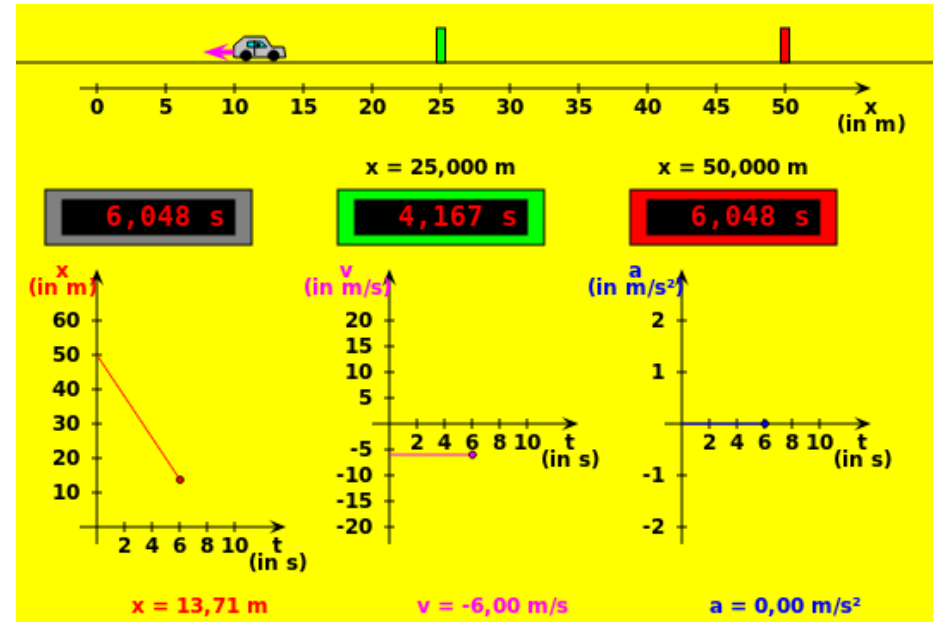
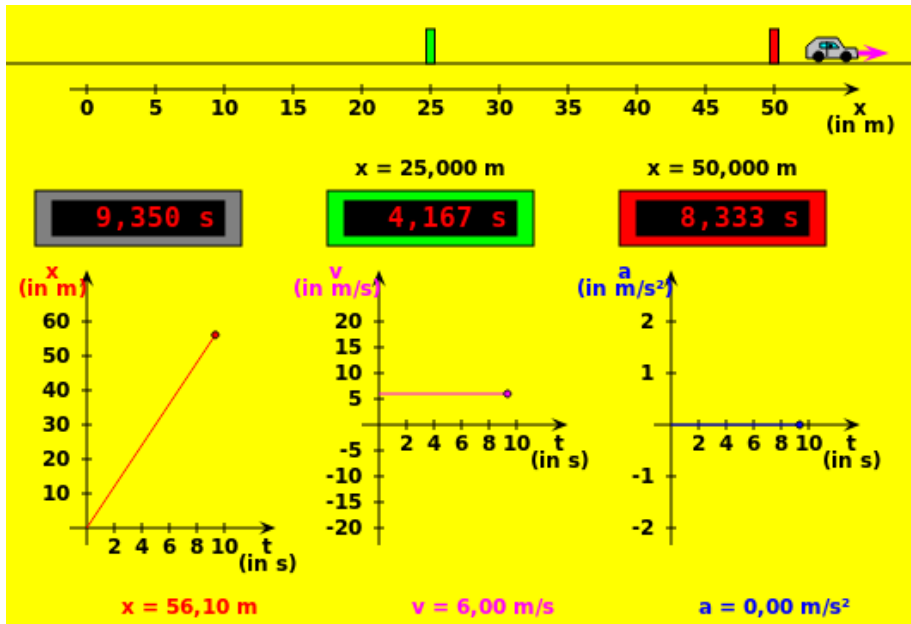
La gráfica es una línea, no confundirla con la trayectoria.

En la gráfica v-t retroceder es $v < 0$, debajo eje horizontal.

- Tramo horizontal: pasa tiempo y no varía v = uniforme
- Tramo inclinado hacia arriba: aumenta v = acelera
- Tramo inclinado hacia abajo: disminuye v = frena
- A mayor inclinación, mayor variación de v



Gráficas x-t y v-t



http://www.walter-fendt.de/html5/phes/acceleration_es.htm



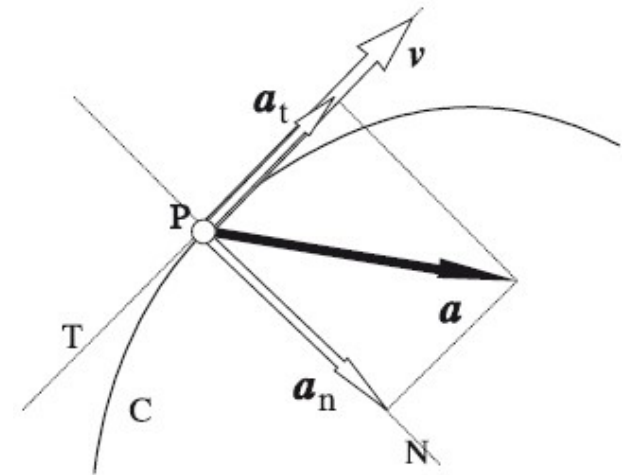
Aceleración (I)

Aceleración (magnitud vectorial): medida de la variación de la velocidad. **Derivada en Bachillerato.** Unidades del módulo en SI: m/s²

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Tiene 2 componentes: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$

- **Aceleración tangencial:** medida de la variación del módulo de la velocidad. Vector tangente a la trayectoria.
Módulo $a_t = dv/dt$
- **Aceleración normal / centrípeta:** medida de la variación de la dirección de la velocidad. Vector normal a la directoria, dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura)
Módulo $a_n = v^2/R$



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moglfm0410_componentes_aceleracion.jpg



Aceleración (II)

Tipos de movimiento (y trayectorias asociadas) según v y a :

- **Rectilíneo:** $a_n=0$, solamente a_t ($\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$: $a=a_t$ en este caso)

MRU (Movimiento Rectilíneo Uniforme)

$$a=0, v=cte$$

MRUA (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado)

$$a=cte, \text{ puede tener signo}$$

Un caso especial de rectilíneo es el **MAS**, se ve en Bachillerato, por separado

- **Circular:** $R=cte$

MCU (Movimiento Circular Uniforme)

$$v=cte, \text{ al ser } R=cte, a_n=cte, a_t=0 \text{ al ser } v=cte$$

MCA (Movimiento Circular Uniformemente Acelerado)

$$a_t=cte, \text{ al ser } R=cte \text{ pero no } v, a_n \text{ no es } cte$$



Ecuaciones y gráficas (I)

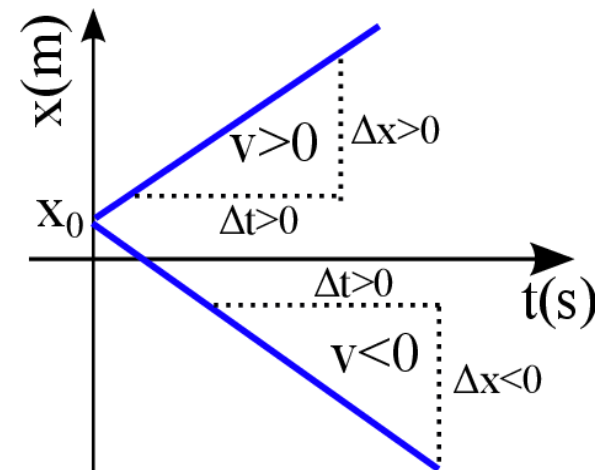
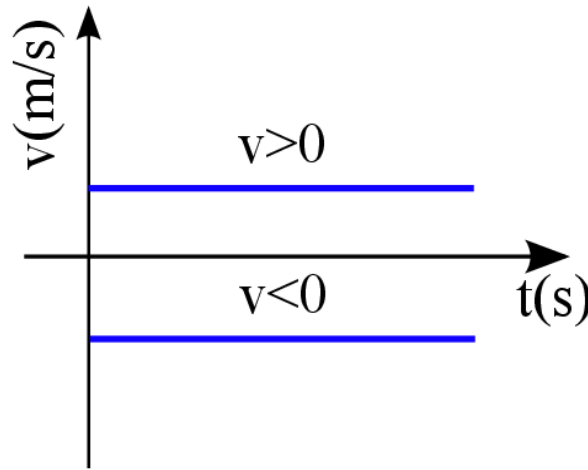
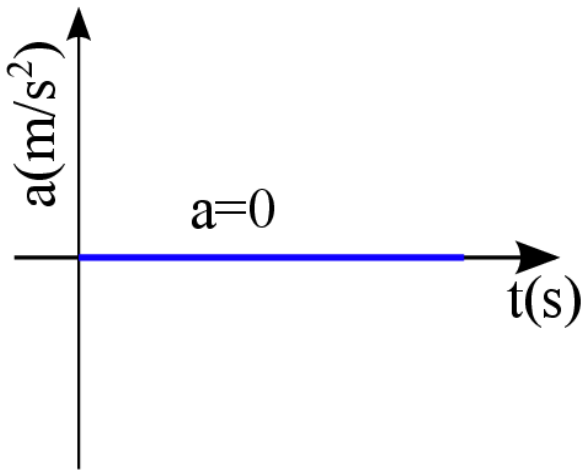
Para movimiento rectilíneo pero aplican a “1 dimensión”: s ó x

MRU

$a=0$ $v=cte$ $x=x_0+v\cdot t$ (ecuación de una recta)

Se puede deducir expresión, y se suele asumir $t_0=0$.

Gráfica x-t: x_0 en origen, es una recta pendiente constante v



Ecuaciones y gráficas (II)

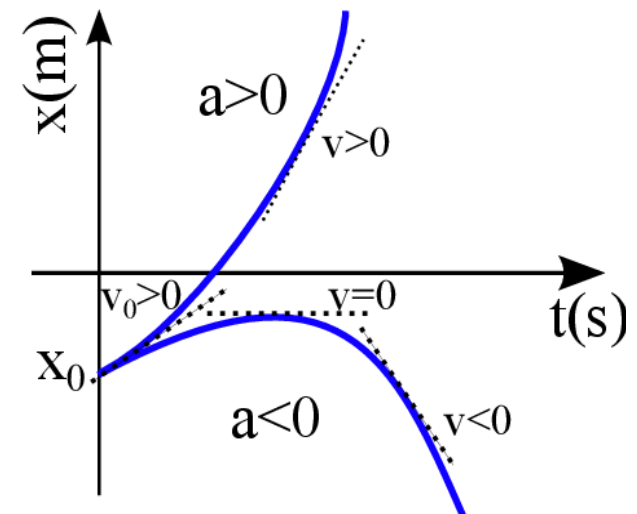
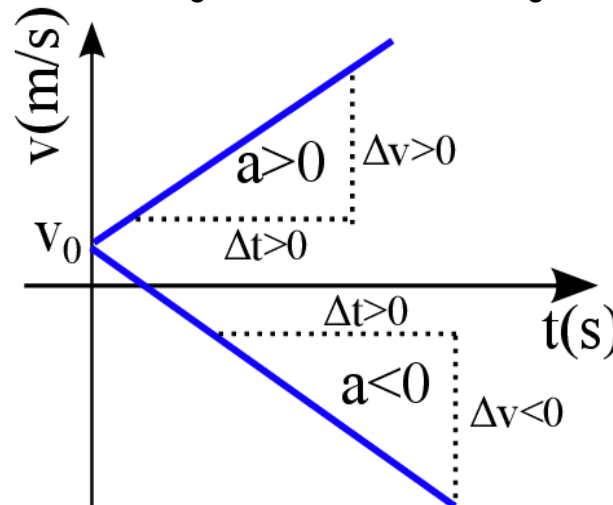
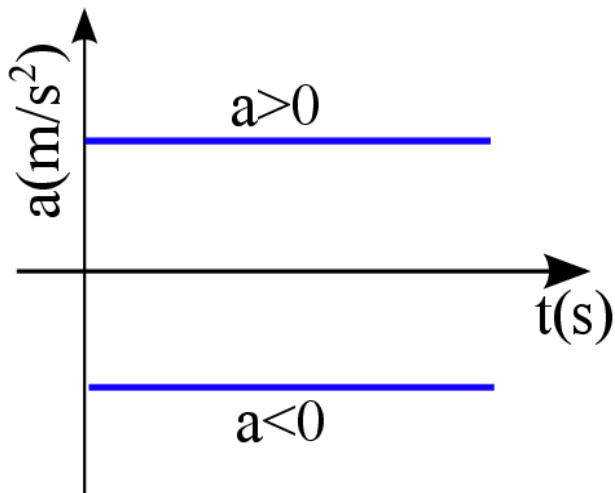
MRUA

$$a = \text{cte} \quad v = v_0 + a \cdot t \quad x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$: deriva de las anteriores, no se maneja tiempo

Importante; ecuaciones MRU son caso MRUA con $a=0$

Gráficas: $x-t$ parábola origen x_0 , $v-t$ recta v_0 origen y pendiente a



Cálculo vectorial y derivadas

Necesario en [Bachillerato](#), a veces desde Física se introducen antes ideas y reglas simples para derivar de manera práctica casos simples, pero se ve de manera global en matemáticas.

Vectores: como coordenadas x, y, z : ó (x, y, z) ó con vectores unitarios.

[Apuntes aparte \(se amplía de 4º\)](#)

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Derivar: se deriva una función “f” de una variable “t” ó “x” ($f(t)$ ó $f(x)$) respecto a esa variable, y la derivada $d(f(x))/dx$ es otra función, que indica la “pendiente de la recta tangente de $f(x)$ ” vs “x” para cada valor de x. “d/dt” se lee “derivada respecto de t”. 4 reglas/”recetas” básicas:

- Derivada suma es la suma de derivadas
- Derivada constante por función es constante por derivada
- Derivada polinomio $a \cdot x^n$ es $a \cdot n \cdot x^{n-1}$. Implica derivada constante es cero
- Derivada $\sin(x)$ es $\cos(x)$. Derivada $\cos(x)$ es $-\sin(x)$



Problemas cálculo vectorial y derivadas

Un tipo de problemas supone tener la expresión del valor del vector posición en función del tiempo (cada uno de sus componentes en función del tiempo) y calcular otros valores vectoriales o derivados, derivando cada componente por separado y obteniendo otro vector: velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración instantánea, componentes intrínsecas de la aceleración o ecuación de la trayectoria.

Si se deriva un valor escalar en función del tiempo se obtiene otra función escalar.



Problemas MRU y MRUA (I)

MRU son simples, con MRUA hay más combinaciones:

- **Aceleraciones a ritmo constante:** ejemplo pasar de 0 a 100 km/h en cierto tiempo.
- **Frenadas a ritmo constante,** cálculo de espacio de frenado: ejemplo frenar uniformemente de 90 a 20 km/h en cierto tiempo.
- **Tiro vertical:** lanzar un objeto verticalmente con cierta velocidad inicial, y es frenado/acelerado uniformemente por la aceleración de la gravedad.
- **Caída libre:** se deja caer un objeto y es acelerado uniformemente por la aceleración de la gravedad.

En movimiento rectilíneo vertical usar eje x puede resultar confuso ya que en matemáticas el eje vertical suele ser el y; en movimiento rectilíneo solamente hay una coordenada que suele ser la x. Siempre es importante la elección del sistema de referencia que implica sentido positivo del eje de coordenadas y punto de referencia: según sistema de referencia la aceleración puede ser positiva o negativa, y la posición inicial puede ser 0, positiva o negativa.



Problemas MRU y MRUA (II)

Problemas comunes a MRU y MRUA son:

- Dadas representaciones de gráficas a-t, v-t y/o x-t y obtener información de ellas; distintos tramos, a/v/espacio recorrido en cada tramo. O bien dadas las ecuaciones, obtener las representaciones.
- Alcance/encuentros de móviles ambos con movimiento rectilíneo: el “alcance” es realmente que ambos móviles estén en la misma posición al mismo tiempo. Se trata de plantear las ecuaciones de ambos movimientos e igualar la posición. Pueden surgir combinaciones de MRU-MRU, MRU-MRUA ó MRUA-MRUA. A nivel gráfico se puede ver como representar las gráficas x-t de ambos móviles y ver en qué punto (instante y posición) se cortan.
- Distancia seguridad, distancia total de frenado: tiempo reacción como MRU y frenado como MRUA



Des/composición / superposición de movimientos (I)

Descomposición: cualquier movimiento se puede descomponer en varios movimientos asociados a los ejes perpendiculares del sistema de referencia (2 en el plano, o 3 en el espacio). Eso permite manejar las ecuaciones de movimiento para cada eje (x, y, z) por separado.

Superposición/composición: también se puede ver a la inversa, que es el principio de superposición: si un móvil es sometido a varios movimientos independientes, el movimiento resultante es la suma vectorial de ambos movimientos, y aplica a posiciones, desplazamientos, velocidades y aceleraciones.



Des/composición / superposición de movimientos (II)

Se pueden componer dos tipos de movimientos en eje x y eje y dando lugar a un movimiento en el plano. El caso MRU-MRU da otro MRU, y MRUA-MRUA da otro MRUA, sin interés porque se puede hacer sin composición eligiendo otro sistema de referencia. El movimiento circular también se puede ver como una composición de movimientos en eje x e y; se ve con MAS.

En 1º Bachillerato se introduce la composición MRU-MRUA que supone una trayectoria parabólica en un plano. Es útil para describir la trayectoria de móviles bajo la acción de gravedad constante en eje y. Las ecuaciones son las de MRU y MRUA para cada eje (x e y). El signo de las velocidades y de la aceleración de la gravedad dependerá según la elección de los ejes.



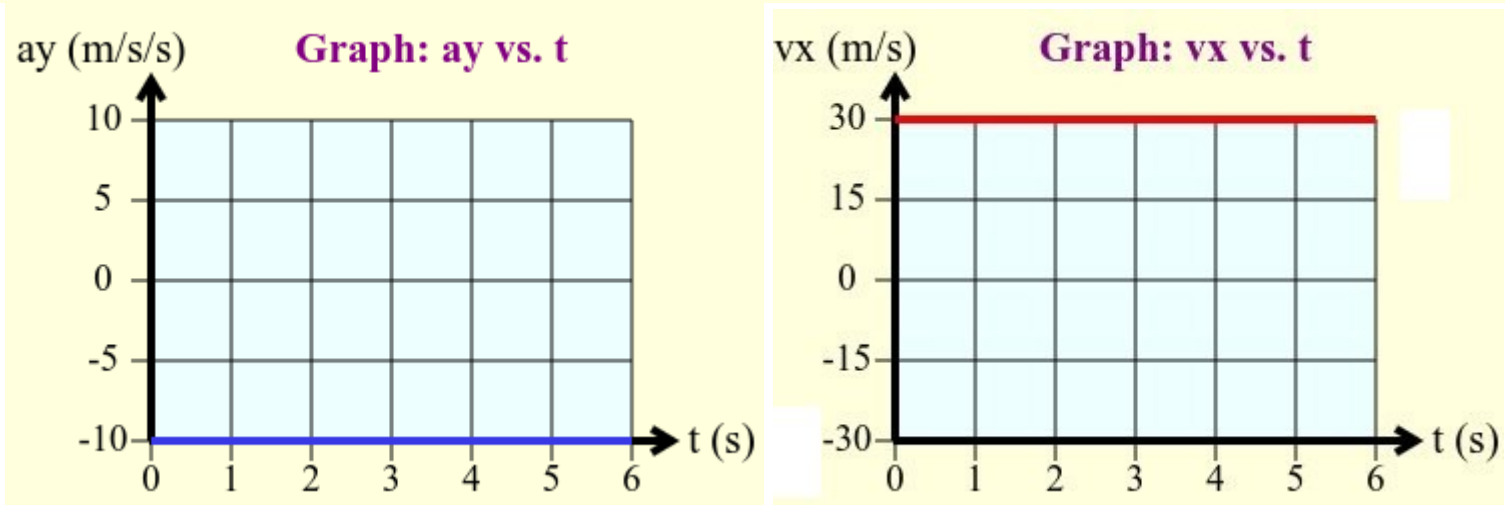
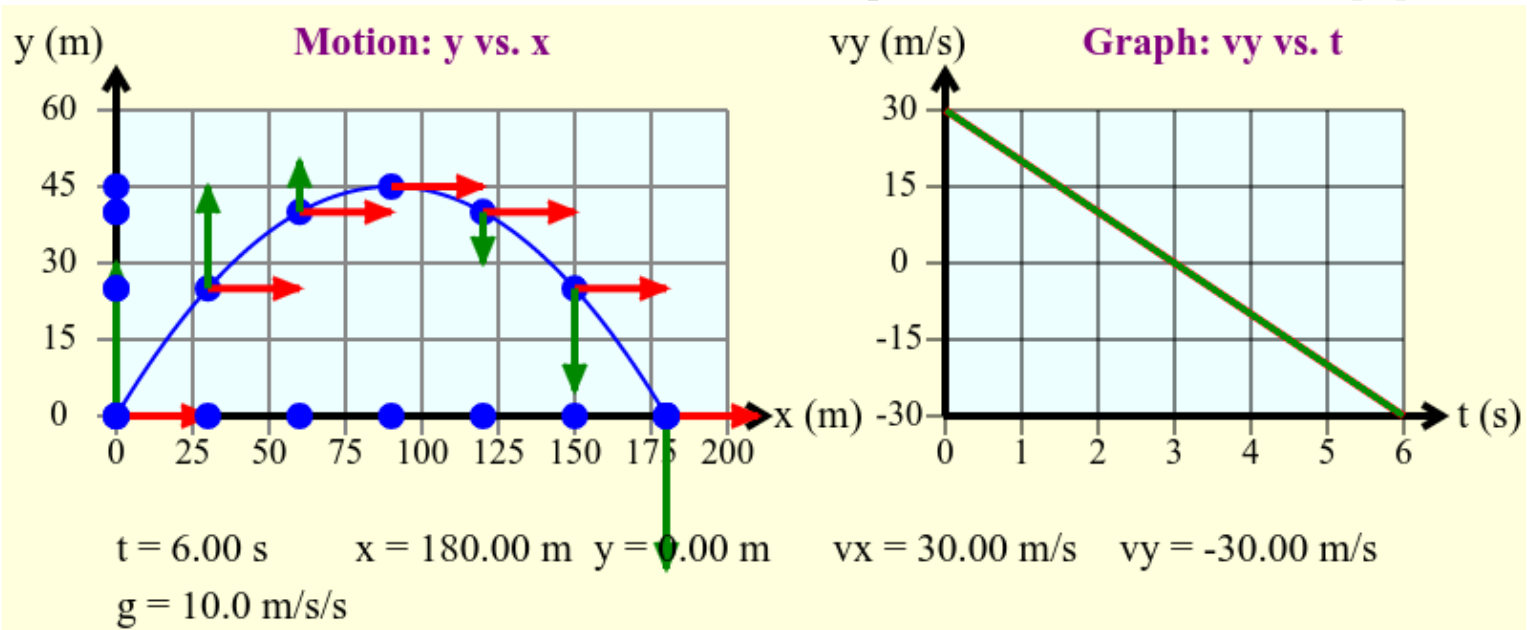
Problemas composición movimientos

Es necesario el uso de trigonometría para descomponer vectores en los ejes de coordenadas. Importante manejo de calculadora con radianes y grados para cálculos de trigonometría)

En los problemas de superposición de movimientos se suele hablar de varias tipologías: tiro horizontal, tiro oblicuo hacia arriba y hacia abajo, pero realmente son casos particulares de un caso genérico con distintos valores de ángulo de partida. Los problemas pueden variar en planteamiento matemático: dar ciertos datos y pedir otros, lo típico es dar altura de lanzamiento, ángulo de lanzamiento, velocidad inicial y altura de llegada, pidiendo altura máxima y alcance o momento de llegada, pero también se puede pedir averiguar el ángulo de lanzamiento, la velocidad inicial, altura de lanzamiento, altura de llegada, o hallar el valor de g .



Visualizar composición (I)



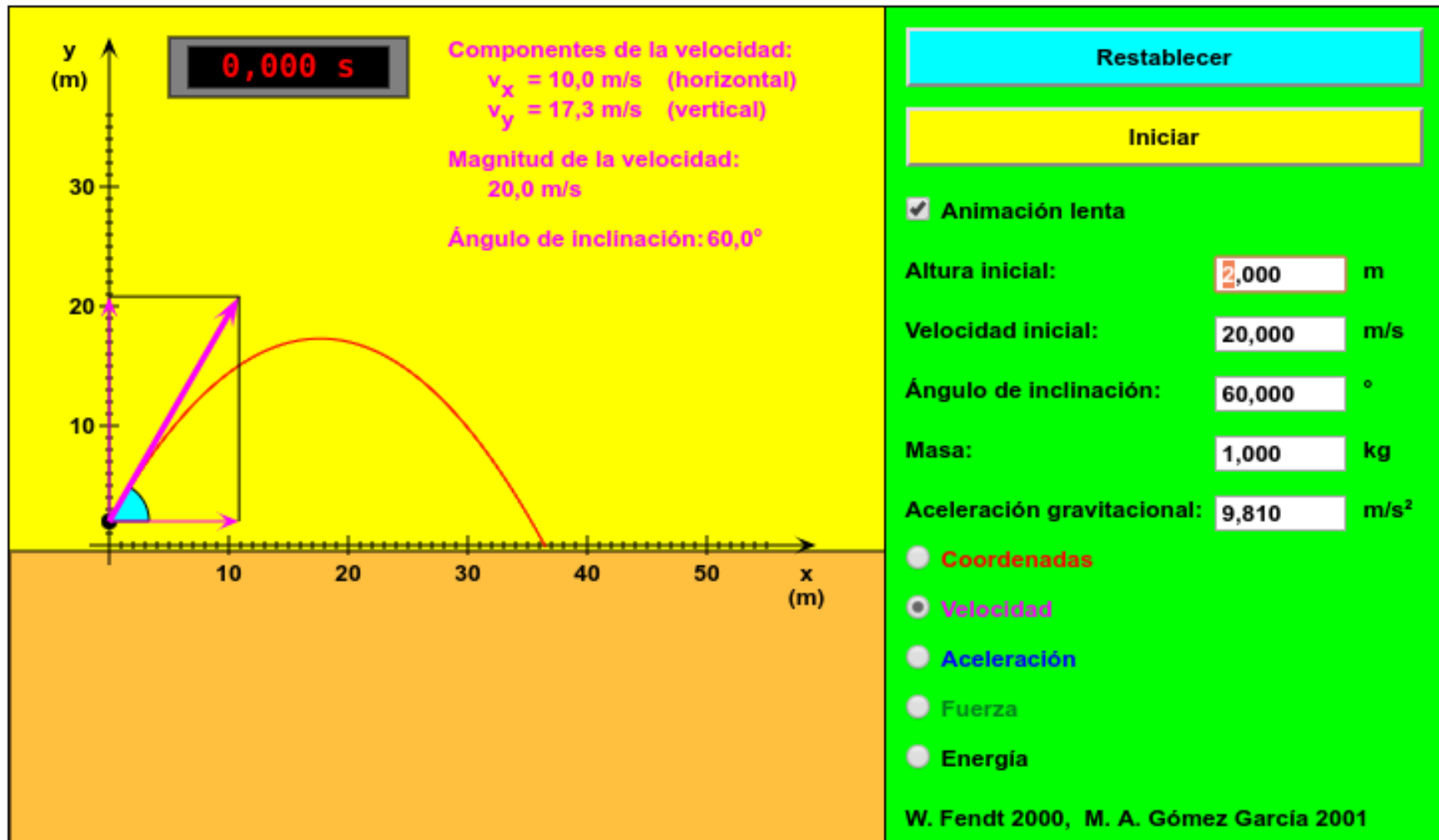
http://physics.bu.edu/~duffy/HTML5/projectile_motion.html

1º Bachillerato. Cinemática

Revisado 17 abril 2020



Visualizar composición (II)



https://www.walter-fendt.de/html5/phes/projectile_es.htm



enrique@fiquipedia.es

1º Bachillerato. Cinemática

Revisado 17 abril 2020

Movimiento Circular

Se usan coordenadas polares: ángulo y radio. Circular \rightarrow R es fijo.

Manejamos nuevas **magnitudes angulares** para rotación, que se pueden relacionar con las magnitudes lineales de traslación:

(Aquí se usa θ para ángulo, en otros sitios se usa φ "fi")

Magnitud traslación	Magnitud rotación	Definición	Unidades SI	Relación
s	θ (zeta)	Posición angular / ángulo recorrido	rad (radianes)	$s = \theta R$
v	ω (omega)	$\omega = d\theta/dt = v/R$ Velocidad angular	rad/s	$v = \omega R$
a	α (alfa)	Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	rad/s ²	$a_T = \alpha R$

Usando relación $v = \omega \cdot R$ se puede llegar a $a_n = v^2/R = \omega^2 \cdot R = v \cdot \omega$



MCU

MCU

$$\alpha=0 \quad \omega=\text{cte} \quad \theta=\theta_0+\omega\cdot t \text{ (ecuación de una recta)}$$

Análogo a MRU pero con cambio magnitudes. Gráficas similares.

En **MCU** el módulo de v , R y la aceleración normal son constantes.

El MCU es un movimiento periódico, definiciones adicionales:

- **Periodo T** = tiempo en completar una vuelta (SI: s)
- **Frecuencia $f = 1/T$** = número de vueltas en 1 segundo (SI: 1/s = Hz). En el caso de MCU se suele hablar de vueltas/s, aunque el concepto de frecuencia en Hz es genérico.
- **Velocidad angular $\omega=2\pi/T=2\pi f$** ; una vuelta son 2π rad.
Cambios de unidades: rad, grados, y rpm (vueltas por minuto)



MCUA

MCUA

$$\alpha = \text{cte}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2 \cdot \alpha \cdot (\theta - \theta_0)$: deriva de las anteriores, no se maneja tiempo

Importante; ecuaciones MCU son caso MCUA con $\alpha=0$

Análogo a MRUA pero con cambio magnitudes. Gráficas similares.

En **MCUA** el módulo de R y a_t son constantes, pero no lo son ni el módulo de la velocidad ni la aceleración normal.



Problemas MCU y MCUA

Dada la sencillez de las ecuaciones para MCU, los problemas en los que se traten ángulo recorrido, tiempo y velocidad angular no tienen complejidad.

Es habitual partir de movimientos circulares periódicos para obtener a partir de ellos el periodo, la frecuencia y la velocidad angular. Ejemplos son la rotación de la Tierra con $T=24$ h y la rotación de objetos que giran a velocidad angular constante como un disco, un tiovivo, una rueda.

Ejemplos típicos de MCUA son el arranque y frenada de un ventilador.

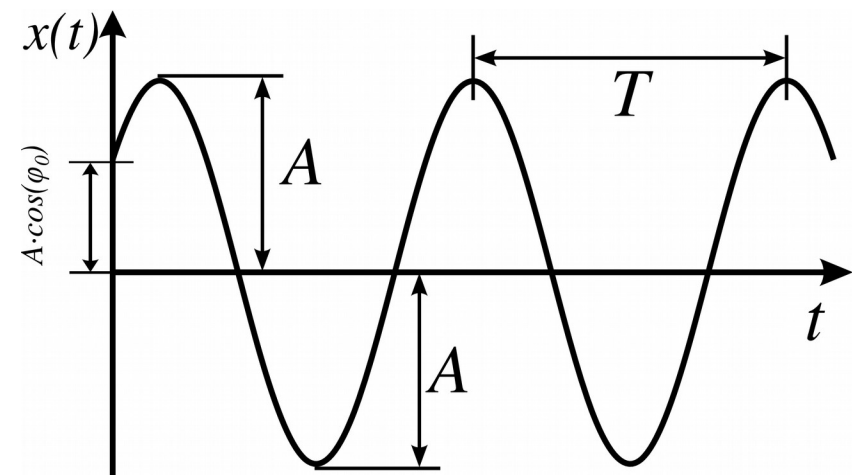
Otro tipo de problema habitual combina traslación con rotación: si hay una traslación en la que un vehículo tiene ruedas y estas giran sin deslizar, se pueden relacionar magnitudes de traslación y rotación: por ejemplo si la distancia recorrida por el vehículo es $2\pi R$, las ruedas habrán dado una vuelta completa. En función de si el vehículo realiza MRU ó MRUA, las ruedas describirán un MCU ó MCUA.



Movimiento Armónico Simple (MAS)

Se habla de MAS para referirse a un sistema que una vez dejado en libertad fuera de su posición de equilibrio vuelve a ella describiendo oscilaciones sinusoidales. Es caso rectilíneo especial, relacionado con dinámica (se ve separado) se puede asociar al circular y comparte magnitudes como T , $f=1/T$ y $\omega=2\pi/T=2\pi f$, con otros nuevos:

- **Posición de equilibrio** ($x=0$):
Punto donde fuerza recuperadora es nula
- **Elongación x :**
Distancia a la posición de equilibrio posición
- **Amplitud A :**
Valor de elongación máxima



Peppergrower, wikimedia., cc-by-sa



Ecuaciones MAS

Se puede y se suele introducir movimiento oscilatorio como la proyección de un movimiento circular uniforme (MCU) y así obtener las expresiones, pero no es obligatorio. Sí es útil ya que los conceptos de f , T , frecuencia angular ya se suelen conocer asociados al MCU. El hecho que realmente define un MAS es la aceleración proporcional a la elongación.

- **Posición** $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$
La elección de coseno y la **fase inicial** φ_0 se tratan aparte.
- **Velocidad** $v(t) = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$ $v(x) = \pm \omega \sqrt{(A^2 - x^2)}$
- **Aceleración** $a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ $a(x) = -\omega^2 x$

Hay expresiones en función del tiempo y de la elongación



Fase inicial (I)

Fase es todo el argumento de la función trigonométrica, seno o coseno. Por ejemplo en $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ la fase es " $\omega t+\varphi_0$ ", y se mide en radianes en el SI.

Fase inicial es el valor de fase para condiciones iniciales; en movimiento oscilatorio la situación inicial es $t=0$, y " $\omega t+\varphi_0$ " pasa a ser " φ_0 ". Fase inicial es la que determina la elongación cuando $t=0$

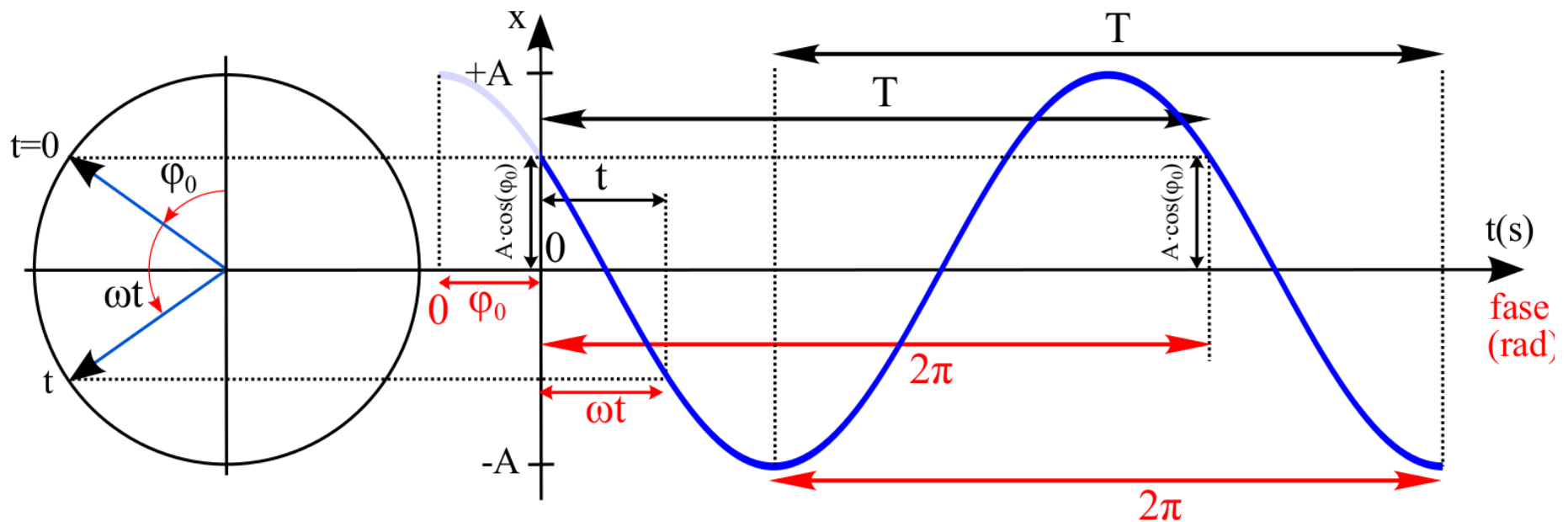
Ver figura donde $x(t=0)=A\cos(\varphi_0)$, y ver que también determina la velocidad (derivada, pendiente) y la aceleración en $t=0$.

Desfase es la diferencia de fase entre dos MAS, normalmente con con misma A y ω . Puede ser el desfase del mismo MAS en distintos instantes.



Fase inicial (II)

Viendo el MAS como la proyección de un MCU, la fase es el ángulo del vector posición del punto que describe el MCU, y la fase inicial está asociado al ángulo inicial. Se incluye representada proyección con coseno (si $\varphi_0=0$ se tiene $x(t=0)=A$, y para $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ el coseno decrece), si se hubiera representado con seno, se tendría que para $\varphi_0=0$ se tiene $x(t=0)=0$, y para $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ el seno crece.

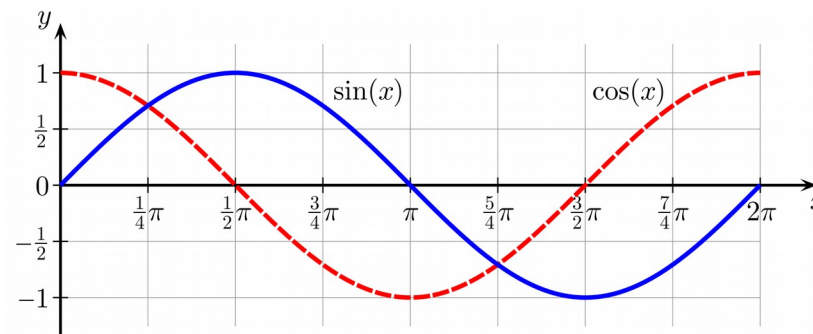


Fase inicial (III)

La función sinusoidal a elegir es arbitraria, cos ó sen: aquí se usa coseno para la posición. La diferencia entre ambas es un desfase.

$$\cos(\alpha) = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$$

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$$



Geek3, wikipedia , cc-by

Ambas funciones son periódicas y tienen la misma forma: el seno está retrasado en fase respecto a coseno; si se le añade $\pi/2$ al argumento (fase) del seno, pasa a ser la función coseno.

A veces interesa usar seno o coseno para hacer que $\varphi_0 = 0$, lo que simplifica la expresión, pero no es obligatorio realizarlo. Tener $\varphi_0 = 0$ supone que, si has elegido función coseno, en la situación inicial elongación es $+A$, y si has elegido función seno, en la situación inicial la elongación es nula.



The simulation interface is divided into three main sections:

- Diagram:** A spring pendulum is shown on the left, consisting of a mass on a spring hanging from a fixed point.
- Graph:** A graph on the right plots displacement s (m) on the vertical axis against time t (s) on the horizontal axis. The vertical axis ranges from -0,05 to 0,05 with increments of 0,01. The horizontal axis ranges from 26 to 36 with increments of 1. A sinusoidal wave is plotted, oscillating between approximately 0,05 m and -0,05 m. A red dot is placed on the wave at approximately $t = 30,281$ s and $s = -0,0322$ m.
- Control Panel:** Located on the right side, it includes:
 - Buttons for "Inicio" (cyan) and "Pausa" (yellow).
 - A checkbox for "Ralentizado" (unchecked).
 - Input fields for:
 - Constante Elástica: 20,0 N/m
 - Masa: 5,00 kg
 - Aceleración de la Gravedad: 9,81 m/s²
 - Amplitud: 0,0500 m
 - Radio buttons for the following variables:
 - Elongación (red)
 - Velocidad (magenta)
 - Aceleración (blue)
 - Fuerza (grey)
 - Energía (grey)
 - Text at the bottom: "W. Fendt 1998, J. Muñoz 1999"

Additional information displayed at the bottom left of the simulation area:

- A digital display showing "30,281 s".
- Text: "Periodo de Oscilación: 3,14 s"
- Text: "Elongación: -0,0322 m (Máximo: 0,0500 m)"

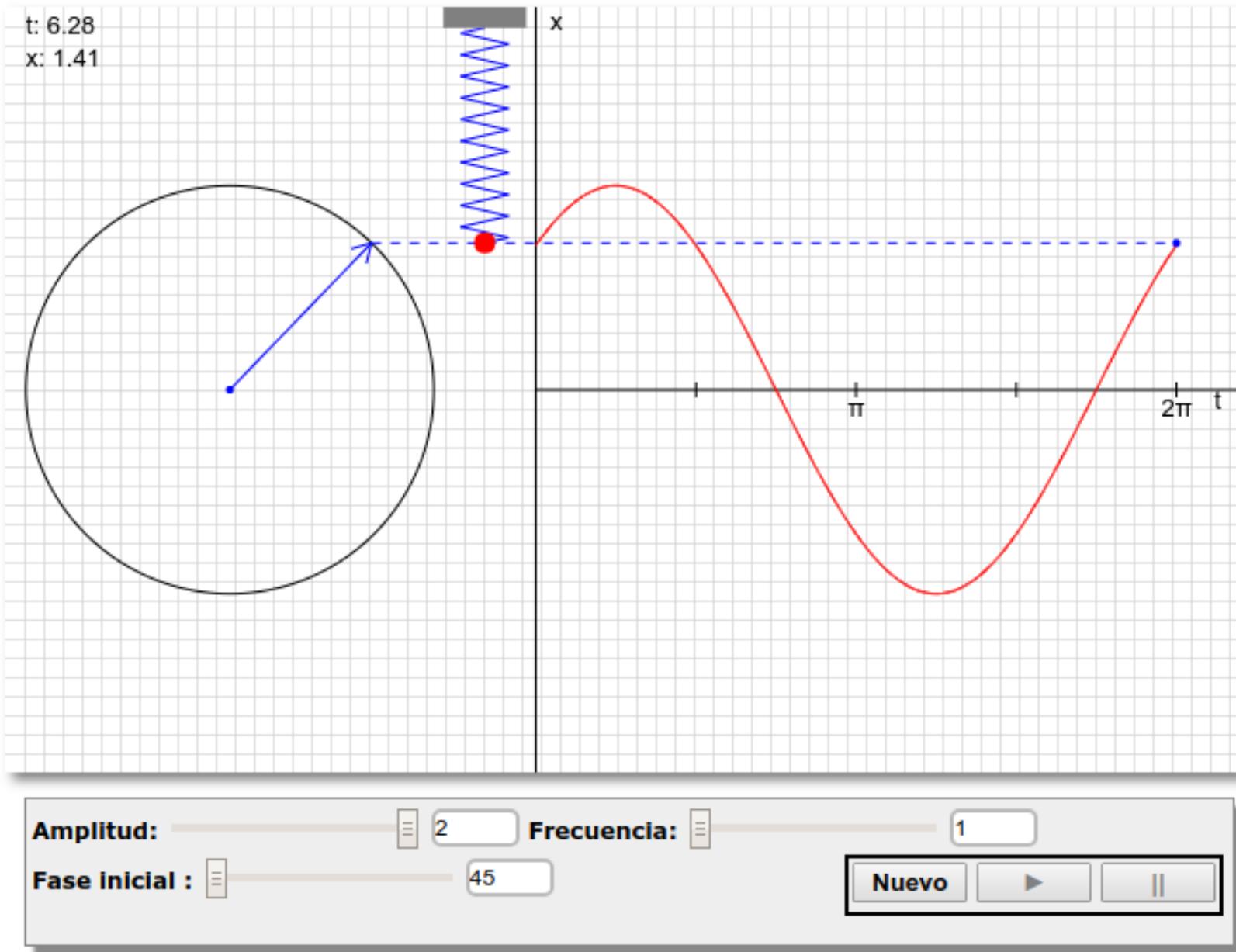
https://www.walter-fendt.de/html5/phes/springpendulum_es.htm



enrique@fiquipedia.es

1º Bachillerato. Cinemática

Revisado 17 abril 2020



<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/mas/mas.html>

