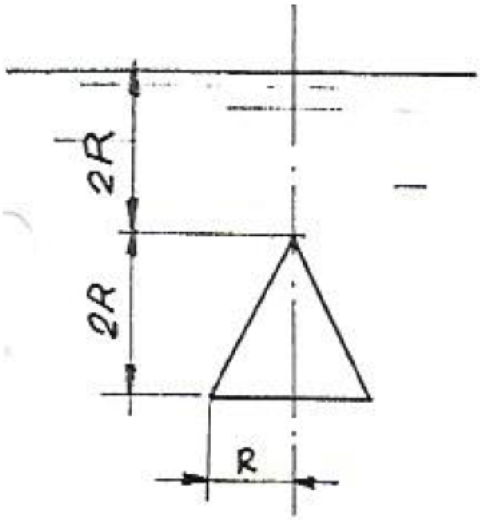
enrique@fiquipedia.es Revisado 25 mayo 2016

FÍSICA

2º. Determinar el trabajo mínimo necesario para sacar fuera del líquido un cono macizo que está sumergido en él, según la figura.
El eje del cono permanece siempre vertical y el nivel del líquido constante.
Radio de la base del cono.....................................R
Altura del cono...2R
Densidad del líquido...d
Densidad del cono...2d



Similar 2002 Castilla-La Mancha 1
Referencias:
http://ocw.upm.es/ingenieria-agroforestal/fisica/contenido/tema-4/cdg-cono.pdf

El trabajo mínimo a realizar para sacarlo fuera del líquido es el asociado a subir el cono una altura 2R, de forma que su base quede alineada con la superficie del líquido.
Se puede considerar que hay un trabajo asociado a desplazar el líquido para que ocupe el hueco que ocupaba inicialmente el cono, pero se indica que el nivel del líquido no varía, así que se asume que no lo hay, porque el líquido de los lados fluye horizontalmente y no hay información de viscosidad.
Asumimos que el valor de R es lo suficientemente pequeño para considerar g constante.
Lo podemos hacer con varios planteamientos:
A. Considerar el trabajo total como la suma de trabajos infinitesimales para subir cada diferencial de masa a la nueva posición.
Tomamos un diferencial de volumen como un disco de altura dz y radio r variable: $dV_{cono}=\pi r^2 dz$
El diferencial de masa de cono $dm=\rho_{cono}\cdot dV_{cono}=2d\pi r^2 dz$
Cada dm hay que subirlo una altura 4R
Relacionamos r con z. Tomamos z=0 en la base del cono.
Usando triángulos semejantes o viendo que el ángulo que forma la generatriz del cono con su eje es tal que su tangente es R/2R=0,5

$$\frac{R}{2R}=\frac{r}{2R-z}\Rightarrow 2r=2R-z\Rightarrow r=R-\frac{z}{2}$$

$$W=\int dW=\int_{abajo}^{superficie} dF_{dentro\,líquido}\,\Delta z+\int_{superficie}^{arriba} dF_{fuera\,líquido}\,\Delta z$$

El diferencial de fuerza dentro del líquido es el peso menos el empuje de ese diferencial
El diferencial de fuerza fuera del líquido es solamente el peso (no consideramos empuje de aire)
Como límite de integración tomamos dentro y fuera del líquido la altura del cilindro, de 0 a 2R, para tomar todos sus diferenciales, poniendo un valor de desplazamiento asociado a cada caso para considerar llegar a la superficie en el caso de esta dentro del líquido o llegar al punto correspondiente del cilindro en su posición fuera del líquido.
- Dentro del líquido: la altura subida por un diferencial en posición inicial z es 4R-z: para z=0 sube 4R dentro del líquido hasta la superficie, para z=2R sube 2R hasta la superficie (el resto sube fuera del líquido)
- Fuera del líquido: la altura subida respecto de la superficie del fluido por un diferencial en posición inicial z es z: para z=0 no sube nada fuera del líquido, para z=2R debe subir 2R.

$$W=\int_0^{2R}(2d\cdot\pi r^2 dz\, g-d\cdot\pi r^2 dz\, g)\cdot(4R-z)+\int_0^{2R}(2d\cdot\pi r^2 dz\, g)\cdot z$$

$$W=d\pi g\int_0^{2R}\left(R-\frac{z}{2}\right)^2(4R-z)dz+d\pi g\int_0^{2R}\left(R-\frac{z}{2}\right)^2 2z\,dz$$

$$W=d\pi g\int_0^{2R}\left(R-\frac{z}{2}\right)^2(4R-z+2z)dz$$

$$W=d\pi g\left(\int_0^{2R}\left(R^2-Rz+\frac{z^2}{4}\right)(4R+z)dz\right)$$

$$W=d\pi g\left(\int_0^{2R}\left(4R^3-4R^2z+\cancel{Rz^2}+R^2z-\cancel{Rz^2}+\frac{z^3}{4}\right)dz\right)$$

$$W=d\pi g\left[4R^3z-4R^2\frac{z^2}{2}+R^2\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{16}\right]_0^{2R}$$

$$W=d\pi g\left(\cancel{8R^4-4R^2 2R^2}+R^2 4\frac{R^2}{2}+16\frac{R^4}{16}\right)$$

$$W=3\pi d g R^4$$

Validaciones:
Lógicas: el trabajo aumenta con d, g y R, siendo nulo si cualquiera de ellos es nulo.

Dimensionales: $[d\pi g 3R^4]=\frac{M}{L^3}\cdot\frac{L}{T^2}L^4=M\frac{L^2}{T^2}=[W]ok$

B. Considerar el trabajo como la variación de energía del cilindro entre ambas posiciones

Tenemos una energía potencial gravitatoria y otra energía potencial de empuje, para las que tenemos que calcular el centro de masas del cono. Por simetría sabemos que está en su eje, pero calculamos la altura. Podemos calcular que está a H/4 que en este caso es 2R/4=R/2, pero lo calculamos

$$z_{CM}=\int_0^{2R}\frac{z\,dm}{M}=\int_0^{2R}\frac{(z\,\cancel{2d\pi}r^2dz)}{\frac{1}{3}\cancel{\pi}R^2 2R\,\cancel{2d}}=\frac{3}{2R^3}\int_0^{2R}\left(R^2-Rz+\frac{z^2}{4}\right)z\,dz$$

$$z_{CM}=\frac{3}{2R^3}\left[R^2\frac{z^2}{2}-R\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{16}\right]_0^{2R}=\frac{3}{2R^3}\left(R^2 4\frac{R^2}{2}-R8\frac{R^3}{3}+16\frac{R^4}{16}\right)=\frac{3}{2}R\left(2-\frac{8}{3}+1\right)$$

$$z_{CM}=\frac{3}{2}R\frac{(6-8+3)}{3}=\frac{R}{2}$$

El trabajo a realizar será el asociado a trasladar el CM contra la gravedad una altura 4R, y el asociado a trasladar el CM contra el empuje una altura 4R-R/2

$$W=M_{cono}g4R-M_{líquido}g\left(4R-\frac{R}{2}\right)=\frac{1}{3}\pi R^2 2Rg\left(2d4R-d\left(4R-\frac{R}{2}\right)\right)$$

$$W=\frac{2}{3}\pi d g R^3\left(8R-4R+\frac{R}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi d g R^3\frac{(8R+R)}{2}=3\pi d g R^4$$