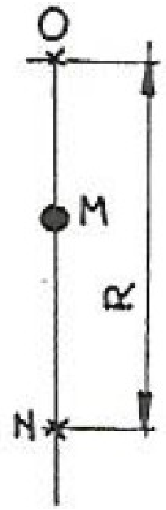
enrique@fiquipedia.es Revisado 26 mayo 2016

FÍSICA

1º. Se deja caer desde O un punto pesado M, sometido a una fuerza atractiva vertical proporcional a la distancia al punto O, e igual al peso cuando la distancia al centro O de atracción al punto vale R.
Calcular la velocidad máxima del punto M en su movimiento.



Tomamos como sistema de referencia eje x vertical con x positivas hacia abajo, con origen en O. Llamamos x a la distancia del punto O al punto M. Llamamos K a la constante de proporcionalidad de la fuerza atractiva y la distancia, por lo que F=-Kx (vemos que es una fuerza tipo Hooke)

Como si r=R se igual con peso $KR=Mg \Rightarrow K=\frac{Mg}{R} \Rightarrow F=-\frac{Mg}{R}x$

Aplicando la 2ª ley de Newton $-\frac{Mg}{R}x+Mg=Ma \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-g}{R}x+g$

Se trata de una ecuación diferencial que podemos ver similar a la de un MAS $a=-\omega^2 x\,;\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$
pero tiene un término adicional constante. Para resolverlo hay dos planteamientos equivalentes

A. Realizar un cambio de variable z=x-R (cuando x=R, z=0) con lo que obtenemos como ecuación $\frac{d^2z}{dt^2}=-\omega^2 z$ que es la de un MAS de solución $z=c_1\cos(\omega t)$ y cambiando variable $x=c_1\cos(\omega t)+R$

B. Ver que es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea x''+ax=b, y que tiene como solución particular es x=R. La ecuación homogénea es la ecuación asociada a un MAS que sabemos que tiene como solución homogénea $x=c_1\cos(\omega t);\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$ y general $x=c_1\cos(\omega t)+R$

Para ambos métodos aplicamos que en t=0 x=0: $0=c_1+R \Rightarrow c_1=-R$ y llegamos a que la solución es $x=-R\cos(\omega t)+R=R(1-\cos(\omega t))$

Podemos validar que es solución de la ecuación diferencial derivando dos veces y sustituyendo

$\cancel{R}\frac{g}{R}\cos(\omega t)=\frac{-g}{R}\cancel{R}(1-\cos(\omega t))+g$

Vemos que el valor de la posición oscila entre 0 (cuando cos=1) y 2R (cuando cos=-1); se trata de un MAS que oscila respecto de la posición de equilibrio x=R con amplitud R, y podríamos indicar que $v_{máx}=A\omega=R\sqrt{\frac{g}{R}}=\sqrt{Rg}$

Llegamos al mismo resultado si obtenemos la expresión de la velocidad derivando

$v=\frac{dx}{dt}=R\sqrt{\frac{g}{R}}sen(\sqrt{\frac{g}{R}}t)=\sqrt{Rg}\,sen(\sqrt{\frac{g}{R}}t)$

Esa velocidad máxima se alcanza en el punto de equilibrio del MAS, que es x=R