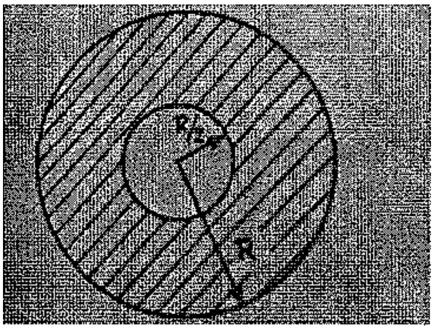
enrique@fiquipedia.es Revisado 9. febrero 2020

1.- (3 puntos) En el interior de una esfera dieléctrica de radio R, de constante ε y uniformemente cargada con una densidad volumétrica de ρ C/m³, se practica una cavidad esférica concéntrica de radio R/2. Suponiendo que en la cavidad y en el exterior el dieléctrico es el vacío (ε_0). Calcular el potencial en el centro, suponiendo el potencial en el infinito es nulo.



Referencias
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Potencial_en_el_centro_de_una_esfera
Ver recopilación problemas sobre Gauss en esferas, con similitud con EvAU Madrid 2019-Julio-Coincidentes-B3 y Andalucía 2018-Física1
http://www.fiquipedia.es/home/recursos/ejercicios/ejercicios-elaboracion-propia-fisica-2-bachillerato/ProblemaFisicaCampoElectricoGaussEsfera.pdf?attredirects=0
Ver Cataluña 2001 Problema C2
https://electricidad.usal.es/Principal/Fenomenos/Publicaciones/Descargas/02_Dielectricos.pdf
Resuelto por sleepylavoisier en http://docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=6229#p32723
Gracias a @Patrick_Kools por compartir.

Planteamos primero la expresión de campo utilizando Gauss, para obtener el potencial a partir del campo.

- Para r<R/2, la carga contenida es cero
- Para R/2<r<R, la carga contenida será $Q_{interior}=\rho(\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi(\frac{R}{2})^3)=\frac{4}{3}\pi\rho(r^3-\frac{R^3}{8})$ [1]
- Para R<r, la carga total contenida será $Q_{total}=\rho\frac{4}{3}\pi R^3(1-\frac{1}{8})=\frac{7}{6}\pi\rho R^3$ [2]

Utilizamos la ley de Gauss considerando dieléctrico distinto de vacío $\oint\vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon}$
Podríamos plantearla teniendo en cuenta el vector desplazamiento, que sería equivalente y que lleva a la misma expresión
$\oint\vec{D}\,\vec{dS}=Q_{interior}$ siendo $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$ donde el vector P es la polarización asociada al dieléctrico.

Si no hubiera dieléctrico, la expresión pasa a ser la ley de Gauss habitual $\oint\vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}$
Por simetría esférica el vector desplazamiento y campo son radiales y hacia afuera al ser la carga positiva, calculamos el módulo

- Para r<R/2, el campo eléctrico es nulo.
- Para R/2<r<R (región en la que el dieléctrico no es el vacío), usando [1]

$$\oint\vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon}\Rightarrow E\oint dS=\frac{4}{3}\pi\frac{\rho}{\varepsilon}(r^3-\frac{R^3}{8})\Rightarrow E=\frac{4}{3}\pi\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(r^3-\frac{R^3}{8})}{4\pi r^2}\quad[3]$$

$$E=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}(r-\frac{R^3}{8r^2})$$

- Para R<r (región en la que el dieléctrico es el vacío), usando [2]

$$\oint\vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Q_{interior}}{\varepsilon_0}\Rightarrow E\oint dS=\frac{7}{6}\pi\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^3\Rightarrow E=\frac{\frac{7}{6}\pi\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^3}{4\pi r^2}=\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\quad[4]$$

(La expresión es idéntica al campo generado por una carga puntual de valor igual a toda la carga total)

A partir de campo calculamos potenciales; como la referencia es 0 en el infinito por enunciado, calculamos primero potencial en la parte exterior, para radios mayores que R, usando [4]

$$\Delta V=V(r)-\cancel{V(\infty)}=\frac{E_p(r)-\cancel{E_p(\infty)}}{q}=\frac{-W_{FC\infty\rightarrow r}}{q}=\frac{-\int_{\infty}^{r}\vec{F}\,d\vec{r}}{q}=\int_{r}^{\infty}\vec{E}\,d\vec{r}=\int_{r}^{\infty}E\,dr \quad [5]$$

$$\int_{r}^{\infty}\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}dr=\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^3\left[\frac{-1}{r}\right]_r^{\infty}=\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}$$

La expresión es idéntica a si hubiésemos usado la expresión para una carga puntual $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$

Sustituyendo para el exterior r=R, tenemos $V(R)=\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2$ [6]

Ahora calculamos el potencial en la parte interior respecto al potencial en la parte exterior, para la región con dieléctrico con r mayor que R/2 y menor que R, usando [3]

$$\Delta V=V(r)-V(R)=\frac{E_p(r)-E_p(R)}{q}=\frac{-W_{FC R\rightarrow r}}{q}=\frac{-\int_{R}^{r}\vec{F}\,d\vec{r}}{q}=\int_{r}^{R}\vec{E}\,d\vec{r}=\int_{r}^{R}E\,dr$$

$$\Delta V=\int_{r}^{R}\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left(r-\frac{R^3}{8r^2}\right)dr=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{R^3}{8}\left(\frac{-1}{r}\right)\right]_r^{R}=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{8}-\left(\frac{r^2}{2}+\frac{R^3}{8r}\right)\right) \quad [7]$$

$$\Delta V=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{5}{8}R^2-\frac{r^2}{2}-\frac{R^3}{8r}\right)$$

Sustituyendo para el interior r=R/2, tenemos

$$\Delta V=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{5}{8}R^2-\frac{(R/2)^2}{2}-\frac{R^3}{8(R/2)}\right)=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{5}{8}R^2-\frac{R^2}{8}-\frac{R^2}{4}\right)=\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{1}{4}R^2=\frac{1}{12}\frac{\rho}{\varepsilon}R^2 \quad [8]$$

El potencial en la cara interior será, usando [6] y [8]

$$\Delta V=V(R/2)-V(R)\Rightarrow V(R/2)=V(R)+\Delta V=\frac{7}{24}\frac{\rho}{\varepsilon_0}R^2+\frac{1}{12}\frac{\rho}{\varepsilon}R^2$$

El potencial que nos piden es el del centro de la esfera, pero como en el interior no hay campo, el potencial es constante, de modo que en el centro de la esfera su valor es igual que para R/2.

Validación del resultado con análisis dimensional, debe tener unidades de voltio (N/C)

$$\left[\frac{\rho}{\varepsilon}R^2\right]=\frac{\frac{C}{m^3}}{\frac{C^2}{N\cdot m^2}}m^2=\frac{\cancel{C}\cdot N\cdot m^2\cdot \cancel{m^2}}{m^3\cdot C^{\cancel{2}}}=\frac{N\cdot m}{C}=\frac{J}{C}=V$$