Problema 1[1]

Rodrigo Alcaraz de la Osa

Cantabria 2016

[1] Con correcciones de Enrique García Simón (enrique@fiquipedia.es).

Una lanzadera espacial coloca un satélite artificial a 15000 km del centro de la Tierra con una velocidad de 5600 m/s que forma un ángulo de 72º con la dirección radial. Calcula:

(a) Posición del apogeo y perigeo de la órbita que sigue el satélite.

(b) Velocidad del satélite en esos puntos.

(c) Período orbital del satélite.

Datos: Masa de la Tierra $= 5.98 \times 10^{24}$ kg y $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.

Sea $r_0 = 15000$ km la distancia inicial a la que se encuentra el satélite del centro de la Tierra y $v_0 = 5600$ m/s su velocidad inicial, la cual forma un ángulo $\theta_0 = 72°$ con la dirección radial[2].

[2] Es decir, $|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = r_0 v_0 \sin\theta_0$.

(a) Utilizamos la conservación tanto de la energía mecánica total como del momento angular. La energía mecánica inicial, E_0, viene dada por

$$E_0 = E_{c_0} + E_{p_0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0},$$

mientras que el módulo del momento angular inicial es

$$L_0 = |\mathbf{L}_0| = m|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = mr_0v_0\sin\theta_0$$

En una posición cualquiera, r, la energía mecánica total será

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

siendo el módulo del momento angular[3]

[3] La velocidad orbital es siempre tangente a la trayectoria/perpendicular en apogeo y perigeo al vector posición con referencia en el foco.

$$L = |\mathbf{L}| = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mrv\sin\theta$$

Igualando los momentos angulares obtenemos

$$L_0 = L \Rightarrow v = \frac{r_0v_0\sin\theta_0}{r\sin\theta} \tag{1}$$

Igualando las energías mecánicas totales y sustituyendo v por (1) llegamos a la ecuación de segundo grado para r:

$$\left(v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}\right)r^2 + 2GMr - \left(\frac{r_0v_0\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)^2 = 0$$

Esta ecuación tiene 2 soluciones. Particularizando para el apogeo, r_a, y el perigeo, r_p, donde $\theta = \pi/2$, obtenemos:

$$r_a = 2.47 \times 10^7\ \mathrm{m}$$
$$r_p = 1.18 \times 10^7\ \mathrm{m}$$

(b) No tenemos más que sustituir r_a y r_p en (1) para obtener[4]:

$$v_a = \frac{r_0 v_0 \sin\theta_0}{r_a} = 3.23 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$$
$$v_p = \frac{r_0 v_0 \sin\theta_0}{r_p} = 6.76 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$$

[4] Aquí de nuevo utilizamos que la velocidad orbital es siempre perpendicular en apogeo y perigeo al vector posición con referencia en el foco.

(c) Para calcular el período orbital utilizamos la 3ª LEY DE KEPLER:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

donde

$$a = \frac{1}{2}(r_a + r_p)$$

es el radio medio de la órbita, que coincide con el semieje mayor de la elipse. Sustituyendo valores, obtenemos:

$$T = 2.46 \times 10^4\,\mathrm{s} = 6.84\,\mathrm{h}$$