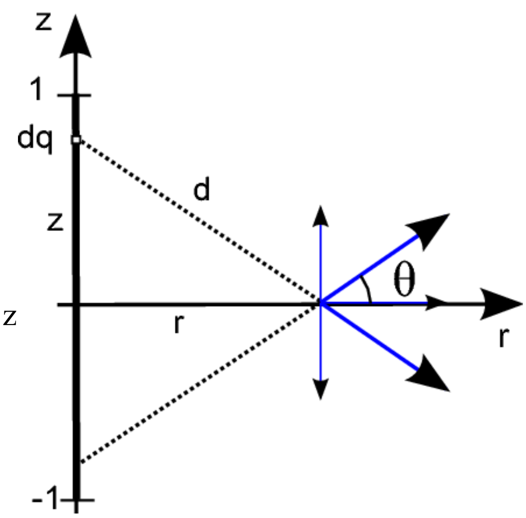
PROBLEMA 2.
Se considera la siguiente distribución de carga por unidad de longitud, λ, sobre el eje Z de un sistema de referencia cartesiano ortogonal situado en el vacío:

$\lambda = a|z|$ si $-1 \leq z \leq 1$ ($a>0$ y constante)
$\lambda = 0$ si $|z| > 1$

a) Determinar el campo eléctrico en cualquier punto del plano z=0.
(Puntuación máxima: 5 puntos.)
b) Sobre el plano z=0 se puede mover, sin rozamiento, un electrón de masa m_e, carga q_e y posición inicial determinada por el punto (x_0, y_0).
b.1.) ¿Cuál debe ser el módulo y la dirección de la velocidad inicial del electrón, v_0, para que su trayectoria sea circular de radio R_0 y centro O (0,0,0)?
(Puntuación máxima: 2,5 puntos.)
b.2.) En las condiciones anteriores, calcular el periodo del movimiento.
(Puntuación máxima: 2,5 puntos.)
Dato: Permitividad eléctrica del vacío, ε_0.
Observación: Las unidades se encuentran en el Sistema Internacional

Resuelto por sleepylavoisier en http://docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=4181&p=20452#p20452
Con densidad de carga uniforme es un problema típico resuelto en varios sitios
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Campo_el%C3%A9ctrico_de_un_segmento_cargado



a) No se puede realizar un planteamiento similar a Gauss en hilo tomando como superficie de Gauss un cilindro, ya que no es un hilo indefinido y el campo y el flujo no sería nulo en "las tapas" del cilindro ni es constante en toda la superficie lateral del cilindro.
Obtenemos el campo por superposición, integrando los diferentes infinitesimales de carga.
Representamos usando eje r y distancia r; representa cualquier eje radial contenido en el plano z=0 desde el eje z
Se ve como por simetría las componentes de campo z se cancelan, y la componente radial se duplica, por lo que usando superposición podemos plantear

$$\vec{E} = \int_{configuración carga} dE_r \vec{u}_r = 2\int_{z=0}^{z=1} dE_{dq\,r} \vec{u}_r$$

Planteamos relaciones

$$dE_{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{d^2}$$

$$dE_{dq\,r} = dE_{dq}\cos\theta$$

$$d^2 = z^2 + r^2$$ Para z>0, |z|=z, $\lambda = a z$

$$\lambda = \frac{q}{l} \Rightarrow dq = \lambda\, dz$$

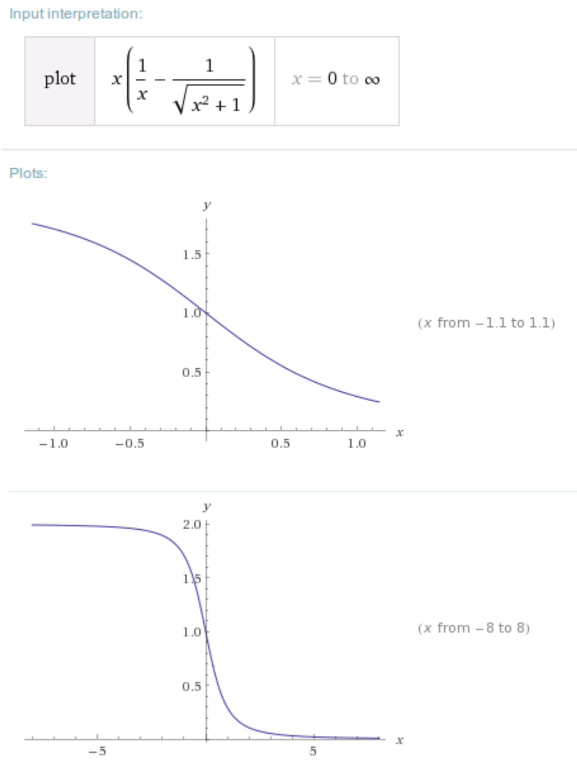
$$\cos\theta = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

Sustituyendo y calculando módulo: sabemos que la densidad de carga carga es positiva y el campo es radial hacia fuera

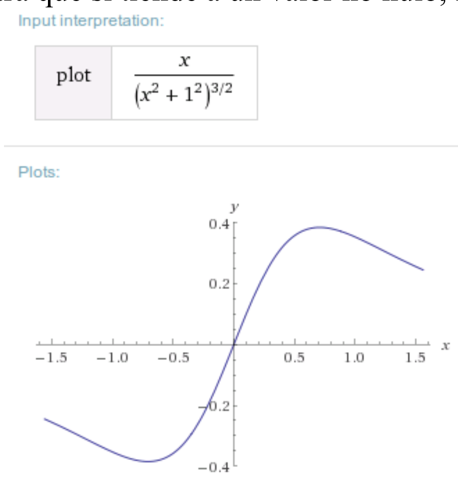
$$E=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z=0}^{z=1}\frac{a\,z\,r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz=\frac{ar}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{z=0}^{z=1}=\frac{ar}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{r}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$E=\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}}\right)$$

Validaciones físicas:
-Si r=∞, E=0 (infinitamente alejado de la carga el campo es nulo)
-Si a=0, E=0 (no hay carga que genere campo)
-Si r=0, E=0 (el campo creado por distribución de carga superior e inferior al plano z=0 es idéntico en módulo y de sentido opuesto y se anula, un valor de E distinto de 0 no tiene sentido lógico, porque como vector no se le podría asignar dirección). Con la expresión anterior no se cumple pero podemos ver como en el desarrollo se ha asumido r distinto de 0, ya que para r=0 el valor de E_{dqr} sería directamente 0 y la integral sería 0.



La resolución de la integral definida con Wolframalpha nos indica que la integración no es válida si r=0
http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+(x%2F(x^2+%2B+re(b)^2)^(3%2F2)dx)+from+x%3D0+to+x%3D1
Eso implica que el campo tiene una discontinuidad (quizá asociada a que la función que describe la densidad de carga no es derivable en r=0), si representamos (el valor de r siempre es positivo, es distancia al origen), el campo no tiene valor 0 en el origen
http://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+x*(1%2Fx-1%2Fsqrt(x%5E2%2B1))
La integración definida para valores próximos a r=0 nos muestra que si tiende a un valor no nulo, lo que refuerza la idea de discontinuidad
http://www.wolframalpha.com/input/?i=integrate+(1e-18*x%2F(x%5E2+%2B+1e-18%5E2)%5E(3%2F2)dx)+from+x%3D0+to+x%3D1



También se puede ver que el integrando es 0 para r=0, por lo que la integral es necesariamente cero
http://www.wolframalpha.com/input/?i=plot+x%2F(x%5E2%2B1%5E2)%5E(3%2F2)
Por lo tanto sería

$$\vec{E}=\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}}\right)\vec{u}_r\,;cuando\,r\neq 0$$

$$\vec{E}=0\,;cuando\,r=0$$

En unidades de Sistema Internacional serían N/C ó V/m
b) Un electrón describiendo un movimiento circular implica fuerzas centrales (es una situación ideal porque una carga acelerada radiaría energía y sería una trayectoria en espiral, ver

https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_Larmor), por lo que igualamos fuerza centrípeta y fuerza eléctrica: el campo eléctrico tiene dirección radial hacia el origen y al ser el electrón una carga negativa y la distribución de carga positiva la fuerza es atractiva.
Igualando módulos

$$F_{eléctrica}=F_{cengrípeta}\Rightarrow|q_e E|=m_e\frac{v^2}{R_0}\Rightarrow|q_e|\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R_0^2}}}\right)=m_e\frac{v^2}{R_0}\Rightarrow v=\sqrt{R_0\frac{|q_e|}{m_e}\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R_0^2}}}\right)}$$

La velocidad es un vector, y hay que indicar dirección y sentido. Si es en el punto (x_0,y_0), tendrá dirección tangente a una circunferencia que pase por ese punto, y el sentido en el plano z=0 podrá ser en el de las agujas del reloj visto desde z positivas o a la inversa. La dirección la podemos indicar con $\tan\theta=\frac{y_0}{x_0}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{y_0}{x_0}$ donde podríamos representar el ángulo y sentido en un diagrama. Unidades ángulo en Sistema Internacional, radianes (rad).
c) Si describe un movimiento circular con velocidad constante es un MCU, movimiento periódico en el que $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi R}{v}$

$$T=\frac{2\pi R_0}{\sqrt{R_0\frac{|q_e|}{m_e}\frac{a}{2\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R_0^2}}}\right)}}$$ Unidades periodo en Sistema Internacional, segundos (s).