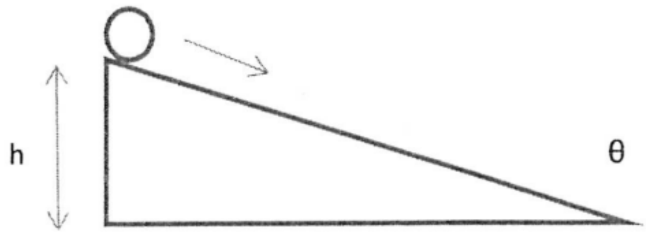
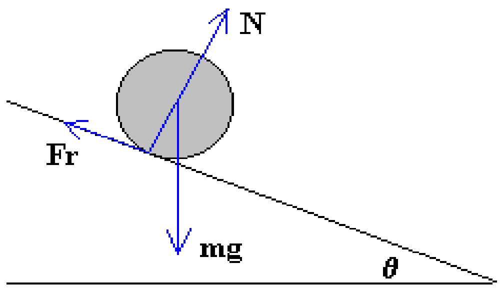
PROBLEMA 1.
Una esfera de radio 20 cm se encuentra situada en lo alto de un plano inclinado a una altura h de 1 m respecto del suelo. Se conoce el coeficiente de rozamiento cinético entre la esfera y el plano μ=0,2. El plano está articulado con una bisagra para permitir variar el ángulo de caída de la esfera. Si se abandona la esfera desde lo alto, se pide, (justificando con rigor cada respuesta con referencia a los correspondientes diagramas de fuerzas):
a. Justificar y calcular el ángulo crítico θ_c a partir del cual la esfera rueda y desliza. (puntuación máxima 4 puntos)
b. Justificar y calcular el valor del trabajo de la fuerza de rozamiento sobre el cuerpo si el ángulo es de 30º, al cabo de 1 m de recorrido sobre el plano (puntuación máxima 2 puntos)
c. Justificar y calcular el valor del trabajo de la fuerza de rozamiento sobre la esfera si el ángulo es de 60º, cuando ha recorrido 1 m sobre el plano. Justificar desde un punto de vista energético la diferencia de valores con el caso anterior. (puntuación máxima 2 puntos)
d. Justificar y calcular la energía cinética del cuerpo para el ángulo de 60º (puntuación máxima 2 puntos)



Referencias
Ver problema 2 de física de oposiciones Agregados de Física y Química, Junio 1990.
Movimiento de rodar en un plano inclinado, Ángel Franco
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/plano_inclinado/plano_inclinado.htm
Estrategias para resolver problemas de sólidos en rotación, jrodriguez@cervera.uned.es
http://www.unedcervera.com/c3900038/estrategias/estrategias_rotacion.html Problema R11

Se indica "coeficiente de rozamiento cinético": sin más información no podemos diferenciar entre coeficiente de rozamiento dinámico y estático planteamos un único coeficiente de rozamiento.
Existe un único coeficiente de fricción de rodamiento pero no lo podemos asociar a él.
Fisica Universitaria 12va. Edicion Sears, Zemansky Vol. 1, Sears, Zemansky; 5.3 Fuerzas de fricción, fricción cinética y estática, fricción de rodamiento
Sergio Fernández Aedo http://www.jfinternational.com/mf/fuerzas-friccion.html

a) Representamos las fuerzas en un diagrama, elegimos eje x en sentido de movimiento.
Aplicamos segunda ley de Newton a cada eje
Eje y: $N-P_y=0 \Rightarrow N=P_y=mg\cos\theta$
Eje x:
$$P_x-F_{roz}=m a_x \Rightarrow \cancel{m} g\, sen\theta-\mu \cancel{m} g\cos\theta=\cancel{m} a_x$$
$$a_x=g(sen\theta-\mu\cos\theta)$$



Física con ordenador, Ángel Franco (c)

Al estar girando respecto un eje principal de inercia podemos plantear $M=I\alpha$ siendo I el momento de inercia, que para una esfera respecto a un eje que pasa por su centro es $I=\frac{2}{5}mR^2$

Al mismo tiempo podemos calcular el momento respecto al centro de la esfera, que en módulo es $M=R\,F_{roz}=R\mu\,mg\cos\theta$

Si aplicamos la condición de rodadura (no está deslizando) $a_x=\alpha R$

Combinando lo anterior

$$\cancel{g}\,sen\theta-\mu\,\cancel{g}\cos\theta=\frac{\cancel{R}\mu\,\cancel{m}\cancel{g}\cos\theta}{\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{R^2}}\cancel{R}\Rightarrow sen\theta-\mu\cos\theta=\frac{5}{2}\mu\cos\theta$$

$$sen\theta=\frac{7}{2}\mu\cos\theta\Rightarrow\tan\theta=\frac{7}{2}\mu\Rightarrow\theta=\arctan\left(\frac{7}{2}\mu\right)$$

Numéricamente $\theta=\arctan\left(\frac{7}{2}0{,}2\right)\approx 35^o$

Para ángulos mayores deslizará, para ángulos menores rodará sin deslizar.

b) Como el ángulo es menor del calculado en a), rueda sin deslizar. La fuerza de rozamiento no realiza trabajo, solamente hace girar la esfera. (El punto sobre el que actúa la fuerza de rozamiento está en contacto con el suelo y tiene desplazamiento nulo)

Por lo tanto el trabajo de la fuerza de rozamiento en este caso es nulo. No se usa el dato de 1 m de distancia recorrida.

c) Como el ángulo es mayor del calculado en a), ya no rueda sin deslizar.

Si la fuerza de rozamiento es constante en todo momento

$$W=\int\vec{F}\,\vec{dx}=-F\Delta x=-\mu m g\cos\theta\Delta x$$

Visión simplificada:

Asumimos desplazamiento 1 m, sustituyendo valores numéricos (no son datos m ni g, los dejamos en función de ellos)

$$W=-0{,}2\,m g\cos 60^o\,1=-0{,}1\,mg\,[W\,en\,J,\,m\,en\,kg,\,g\,en\,m/s^2]$$

Visón detallada:

Como el objeto rueda y desliza, aunque enunciado indica que recorre 1 m, eso hace referencia al centro de masas, pero el punto de contacto ha recorrido menos de 1 m. Parte de la fuerza que se ejerce está asociada a rodar y parte a rozamiento, y el trabajo de la fuerza de rozamiento será ligeramente inferior al calculado en la visión simple.

La distancia recorrida por el punto de contacto en el plano será d=d_t-d_r, siendo d_t la distancia de traslación del centro de masas de la esfera, d_t=1 m, y d_r la de rotación del punto de contacto.

>Si d_r=0, no rueda y tendríamos d=d_t que es el caso anterior.

>Si dt=1 m, estaría rodando sin traslación, pero también supondría 1 m y sería el mismo desplazamiento relativo del punto de contacto y el mismo trabajo y disipación.

Se trata de un MRUA y MCUA: el peso, la fuerza de rozamiento y la fuerza de rotación son constantes. Tomamos eje x en el sentido del movimiento del centro de masas de la esfera y llamamox a_x a la aceleración de su centro de masas, y α a la aceleración angular.

MRUA $d_t=\frac{1}{2}a_x t^2\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2d_t}{a_x}}$

MCUA $d_r=\theta_r R=\frac{1}{2}\alpha R t^2$

Combinando ambas expresiones para el instante en el que se ha recorrido d_t

$$d=d_t-d_r=d_t-\frac{1}{\cancel{2}}\alpha R\frac{\cancel{2}d_t}{a_x}=d_t\left(1-\frac{\alpha R}{a_x}\right)$$

Se puede validar que si rueda sin deslizar (a = αR) se tendría que d=0.

<u>*Planteamiento dinámico:*</u>

El trabajo de la fuerza de rozamiento es

$$W_{roz}=-\mu m g\cos\theta d=-\mu m g\cos\theta d_t(1-\frac{\alpha R}{a_x}) \quad [1]$$

Sustituimos las expresiones de aceleración angular y del centro de masas

$$a_x=g(sen\theta-\mu\cos\theta)$$

$$\alpha=\frac{M}{I}=\frac{R\cdot F_{rotación}}{I}=\frac{R\cdot F_{rozamiento}}{I}=\frac{\cancel{R}\mu \cancel{m} g\cos\theta}{\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{R^2}}\cancel{R}=\frac{5}{2}\mu g\cos\theta$$

Sustityendo

$$W_{roz}=-\mu m g\cos\theta d_t(1-\frac{\frac{5}{2}\mu \cancel{g}\cos\theta}{\cancel{g}(sen\theta-\mu\cos\theta)})=-\mu m g d_t\cos\theta(\frac{sen\theta-\mu\cos\theta-\frac{5}{2}\mu\cos\theta}{sen\theta-\mu\cos\theta})$$

$$W_{roz}=-\mu m g d_t\cos\theta(\frac{\tan\theta-\frac{7}{2}\mu}{\tan\theta-\mu})$$

Planteamiento energético:

La variación de energía mecánica es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, que en este caso es el rozamiento.

A: punto inicial a una altura h

$$E(A)=E_p(A)=mgh$$

B: punto final tras haber recorrido una distancia d_t

$$E(B)=E_p(B)+E_c(B)=mg(h-d_t sen\theta)+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$W_{roz}=\Delta E=E(B)-E(A)=\cancel{mgh}-mg d_t sen\theta+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2+\cancel{mgh}$$

MRUA $v=a_x t$ Para la distancia d_t $v=a_x\sqrt{\frac{2d_t}{a_x}}\Rightarrow v^2=\sqrt{2a_x d_t}$

MCUA $\omega=\alpha t\Rightarrow\omega^2=\alpha^2 t^2$ Para la distancia d_t $\omega^2=\alpha^2\frac{2d_t}{a_x}$

$$\alpha=\frac{M}{I}=\frac{R\cdot F_{roz}}{I}\Rightarrow\alpha^2=\frac{R^2F_{roz}^2}{I^2}$$

Sustituyendo

$$W_{roz}=mghsen\theta+\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}a_x d_t+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{I}\frac{R^2F_{roz}^2}{I^{\cancel{2}}}\cancel{2}\frac{d_t}{a_x}$$

Sustiyendo expresiones de aceleración del centro de masas y de fuerza de rozamiento de a)

$$W_{roz}=mg d_t sen\theta+mg(sen\theta-\mu\cos\theta)d_t+\frac{\cancel{R^2}(\mu mg\cos\theta)^2}{\frac{2}{5}m\cancel{R^2}}\frac{d_t}{g(sen\theta-\mu\cos\theta)}$$

$$W_{roz}=-\mu mg d_t\cos\theta+\frac{5}{2}\frac{\mu^2 mg d_t(\cos\theta)^2}{sen\theta-\mu\cos\theta}=-\mu mg d_t\cos\theta(1+\frac{\frac{5}{2}\mu\cos\theta}{sen\theta-\mu\cos\theta})$$

$$W_{roz}=-\mu m g d_t\cos\theta(\frac{\tan\theta-\frac{7}{2}\mu}{\tan\theta-\mu})$$

Validación del resultado:

Con la condición vista en apartado a se ve que si $\theta=\arctan(\frac{7}{2}\mu)$ el trabajo de la fuerza de rozamiento es nulo. Para valores mayores el trabajo es negativo, porque la esfera rueda y desliza. Para valores menores el trabajo de la fuerza de rozamiento aparentemente es positivo, pero realmente en rodadura la fuerza de rozamiento no realiza trabajo, validado en expresión [1].
En el apartado b la energía mecánica se conserva: a medida que va descendiendo la energía potencial pasa a energía cinética de traslación y energía cinética de rotación.
En el apartado c la energía mecánica no se conserva, parte de la energía se pierde: el trabajo de la fuerza de rozamiento es negativo en este caso ya que enunciado indica un ángulo de 60º mayor al valor obtenido en apartado a.
d) Aplicamos que $\Delta E_m=W_{fuerzas no conservativas}$ expresión a la que se puede llegar combinando el teorema de las fuerzas vivas $\Delta E_c=W_{total}$ y la definición de energía potencial $\Delta E_p=-W_{fuerzas conservativas}$
Si llamamos A al punto superior, y B al punto inferior, que por trigonometría al descender 1 m por la rampa estará 1·sen(60º) más abajo, y tomamos referencia de energía potencial en el punto superior, podemos calcular la energía cinética total

$$\Delta E_m=E_m(B)-\cancel{E_m(A)}=E_p(B)+E_c(B)=mg(-1)sen(60^o)+E_c(B)=W_{fuerzas no conservativas}$$

$$E_c(B)=W_{fuerzas no conservativas}+mg\,sen(60^o)$$

Visión simplificada:

$$E_c(B)=-0{,}1mg+mg\,sen(60^o)=mg(sen 60^o-0{,}1)\approx 0{,}77\,mg[E_c\,en\,J, m\,en\,kg, g\,en\,m/s^2]$$

Visión detallada:

$$E_c(B)=-0{,}2m\,g\,1\cos(60^o)\frac{\tan(60^o)-\frac{7}{2}0{,}2}{\tan(60^o)-0{,}2}+mg\,sen(60^o)\approx 0{,}799\,mg[E_c\,en\,J, m\,en\,kg, g\,en\,m/s^2]$$

Comentarios:
-El dato del radio de la esfera no se usa
-El dato de la altura de la rampa no se usa