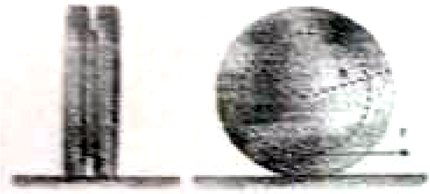
enrique@fiquipedia.es Revisado 5 julio 2016

Deberá responder a las cuestiones de un máximo de tres ejercicios de entre los seis propuestos. Cada ejercicio se califica sobre 10 según la ponderación indicada en cada apartado. La calificación total de la prueba será la que resulte de dividir la puntuación total obtenida entre tres.

1. Un carrete metálico está formado por tres cuerpos cilindros de 3 cm de altura, soldados entre sí de forma que coinciden sus ejes de simetría. En el tambor interior, que tiene un radio de 9 cm, se enrolla una cinta inextensible de espesor despreciable de la que se tira con una fuerza de 120 N, como se muestra en la figura. Sabiendo que el material del que está fabricado el carrete tiene una densidad de 7850 kg/m^3 y que el radio de los cilindros exteriores es de 12 cm, calcule:

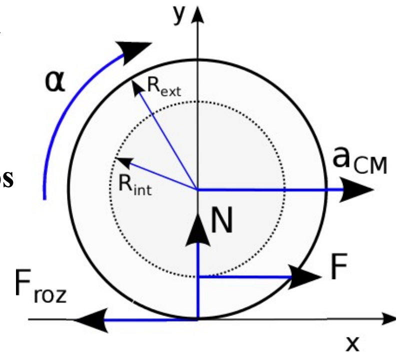


a. Su masa total y su momento de inercia total con respecto al eje que pasa por el centro de masas. (2,5 puntos)
b. El valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que el carrete ruede sin deslizar. (0,5 puntos)
c. La aceleración con la que se desplazará el centro de gravedad del carrete. (2,5 puntos)

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/inercia/inercia.htm
https://www.uclm.es/profesorado/ajbarbero/S_SolidoRigido/Rodadura_Ejemplos_Seleccionados_10.pdf Ejemplo 2
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/examenes/solido/solido_22/solido_22.htm

Asumimos g=9,8 m/s^2 . La densidad es razonable: el hierro tiene una densidad de 7874 kg/m^3

a) La masa del carrete es la suma de las masas de los tres cilindros que lo forman, dos de ellos iguales $m=\rho v=\rho \pi r^2 h$
Sustituyendo valores numéricos usando unidades del Sistema Internacional como la densidad y con 4 cifras significativas como la densidad (asumimos espesor 3,000 y radios 12,00 y 9,000)
Para cada uno de los dos cilindros exteriores de radio 12 cm
$m=7850\cdot\pi\cdot 0{,}12^2 0{,}03=10{,}653769\,kg$
Para el cilindro interior de radio 9 cm $m=7850\cdot\pi\cdot 0{,}09^2 0{,}03=5{,}992745\,kg$
La masa total del carrete es 2·10,653769+5,992745=27,300283 kg
Expresada con 4 cifras significativas **m=27,30 kg**
Por simetría el centro de masas está en el centro del carrete. El momento de inercia del carrete respecto a su eje es la suma de los tres momentos de inercia, ya que mide la oposición a hacer girar respecto al eje y se suman los tres. La expresión para cada uno se puede deducir fácilmente integrando o recordar la expresión del momento de inercia de un cilindro respecto a su eje, que es
$$I=\frac{1}{2}MR^2$$
Para cada uno de los dos cilindros exteriores de radio 12 cm
$$I=\frac{1}{2}\cdot 10{,}653769\cdot 0{,}12^2=0{,}0767071368\,kg\,m^2$$
Para el cilindro interior de radio 9 cm $I=\frac{1}{2}\cdot 5{,}992745\cdot 0{,}09^2=0{,}02427061725\,kg\,m^2$
El momento de inercia total del carrete es 2·0,0767071368+0,02427061725=0,17768489085 kg m^2
Expresada con 4 cifras significativas **I=0,1777 kg m^2**
(podemos plantear que equivale al momento de inercia de un cilindro de la misma masa y cierto radio equivalente $I=\frac{1}{2}MR_{equivalente}^2 \Rightarrow R_{equivalente}=\sqrt{2\frac{I}{M}}=\sqrt{2\cdot\frac{0{,}1777}{27{,}30}}=0{,}1141\,m$ *)*



b) Si el carrete rueda sin deslizar, se cumple la condición de rodadura $a_x=\alpha R_{ext}$ donde R es el radio exterior, ya que es el que está en contacto con la superficie.
Siendo el plano en horizontal y tomando eje x en el sentido del movimiento, aplicamos segunda ley de Newton a cada eje. **Asumimos inicialmente que la fuerza de rozamiento es opuesta la aplicada,**
Eje y $N-P=0 \Rightarrow N=P=mg$
Eje x $F-F_{roz}=m a_x \Rightarrow F-\mu mg=m\alpha R_{ext}$
Al estar girando respecto a un eje principal de inercia, podemos plantear $M=I\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{M}{I}$, lo que se cumple también en este caso vectorialmente: vector momento y vector aceleración angular tienen misma dirección y sentido. El momento tiene dos contribuciones: la fuerza de rozamiento aplicada en el exterior del carrete, y la fuerza aplicada sobre la cuerda unida al carrete central. En este caso cada fuerza hace girar el carrete en un sentido, por lo que los módulos de sus momentos se restan. Según diagrama fuerza rozamiento hace girar en el sentido de las agujas del reloj; tomando x e y en el plano del dibujo, el vector M asociado a la fuerza de rozamiento de estaría dirigido hacia z negativas y lo tomamos negativo, y el vector M asociado a la fuerza aplicada (en la parte inferior del cilindro) estaría dirigido hacia z positivas y lo tomamos positivo.
$M=-R_{ext}F_{roz}+R_{int}F$ M podrá ser negativo (si $R_{ext}\cdot F_{roz} > R_{int}\cdot F$) y el signo indica que girará en el sentido de las agujas del reloj, fijado por la fuerza de rozamiento, o positivo (si $R_{ext}\cdot F_{roz} < R_{int}\cdot F$) y el signo indica que girará en el sentido opuesto a las agujas del reloj.
Combinamos las expresiones, teniendo en cuenta que **asumimos en diagrama a_{CM} positiva, $F>F_{roz}$** y α negativa (gira en el sentido de las agujas del reloj en el diagrama), por lo que introducimos un signo menos ya que realmente con signos y la referencia usada $a_{CM}=-\alpha R_{ext}$, aunque no lo hemos puesto inicialmente (es habitual plantear directamente $R_{ext}F_{roz}-R_{int}F=I\alpha$)

$$F-\mu mg=mR_{ext}\frac{(-(-R_{ext}\mu mg+R_{int}F))}{I}=\frac{\mu m^2 R_{ext}^2 g}{I}-\frac{mR_{ext}R_{int}F}{I}$$

$$\mu=\frac{F}{mg}\frac{(1+\frac{mR_{ext}R_{int}}{I})}{(1+\frac{mR_{ext}^2}{I})}=\frac{F}{mg}\frac{(I+mR_{ext}R_{int})}{(I+mR_{ext}^2)}$$

La expresión es distinta a la que se ve en referencias: allí la fuerza está aplicada por encima del eje.
Sustituyendo numéricamente y expresando con 4 cifras significativas

$$\mu=\frac{120}{27{,}30\cdot 9{,}8}\left(\frac{0{,}1777+27{,}4\cdot 0{,}12\cdot 0{,}09}{0{,}1777+27{,}30\cdot 0{,}12^2}\right)=0{,}3713$$

c) La aceleración del centro de masas del disco (que coincide con centro de gravedad que es término que usa enunciado) la podemos expresar en función del coeficiente de rozamiento y la fuerza, usando la situación en la que fuerza de rozamiento y fuerza aplicada tienen sentido opuesto, que es con la que se ha obtenido el coeficiente de rozamiento.

$$F-F_{roz}=m a_x \Rightarrow a_x=\frac{F-\mu mg}{m}$$

Sustituyendo numéricamente

$$a_x=\frac{120-0{,}3713\cdot 27{,}30\cdot 9{,}8}{27{,}30}=0{,}7569\, m/s^2$$

La aceleración sería un vector, dirección y sentido del movimiento, indicado en figura, como la fuerza aplicada