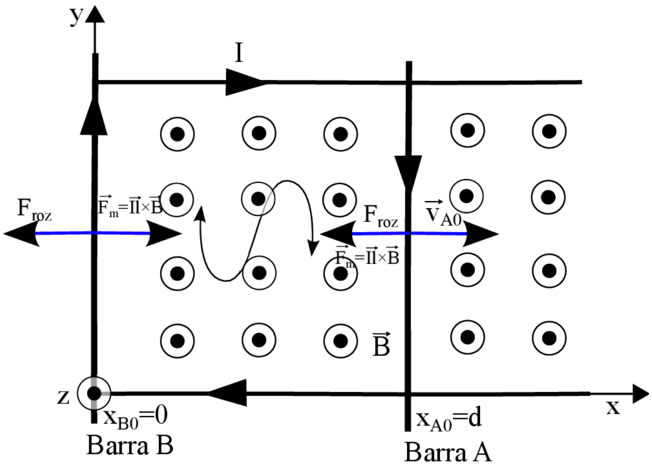
El examen eran dos modelos A y B a elegir uno de los dos, cada uno con 6 preguntas, y el tiempo de realización 3 horas.

FÍSICA Y QUÍMICA. MODELO B

6.- Dos raíles rectilíneos, paralelos, sobre un plano horizontal, de resistencia despreciable, están separados 2 m. Sobre ellos hay dos barras conductoras móviles que forman un rectángulo. Cada barra tiene una masa de 50 Kg y una resistencia de 5Ω.
Una barra se mueve con una velocidad de 5 m·s^{-1}, alejándose inicialmente de la otra. Calcula la velocidad de la otra barra si todo está sometido a la acción de un campo magnético vertical uniforme de 0,25 T y el coeficiente de rozamiento entre los raíles y las barras es μ = 2·10^{-5}.
(1,5 puntos)

Se usa K mayúscula para prefijo kilo, cuando se debe usar k minúscula
https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2010-927#ciii

Realizamos un diagrama / tomamos sistema de referencia:
-Tomamos plano xy como plano horizontal sobre el que están raíles y barras
-Tomamos como sentido x positivo el de avance de la barra que se mueve inicialmente a 5 m/s.
-Tomamos sentido z positivo el del campo magnético
-La distancia inicial entra barras no es dato; la llamamos d
-Llamamos L = 2m a la distancia entre raíles, y R = 5 Ω a la resistencia de cada barra



El rectángulo forma un circuito cerrado, de resistencia total 2·R, que tiene un flujo variable ya que hay movimiento de las barras (al menos una se mueve inicialmente), por lo que habrá corriente inducida. Esa corriente inducida afectará al movimiento de ambas barras.
Llamamos barra A a la que se mueve inicialmente (en posición $x_A(t=0)=d$) y barra B a la que inicialmente está en reposo (en posición $x_B(t=0)=0$), que es la barra para la que se pide la expresión de velocidad.
El flujo que atraviesa el rectángulo es $\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot L\cdot(x_A-x_B)$ (En t=0 el flujo inicial es BLd)
Plantear la ecuación de movimiento de cada barra, para lo que tenemos que plantear el sentido de la corriente inducida y fuerzas asociadas que aparecen. Utilizando la ley de Faraday

$$|\varepsilon|=\frac{d\Phi}{dt}=B\cdot L\cdot\left(\frac{dx_A}{dt}-\frac{dx_B}{dt}\right)=B\cdot L\cdot(v_A-v_B)$$

Sabemos que en t=0 v_{A0}=5 m/s y v_{B0}=0 m/s, luego inicialmente hay una fuerza electromagnética inducida, que según la ley de Lenz se opondrá al aumento de flujo, por lo que si el campo externo va dirigido hacia z positivas, el campo inducido irá dirigido hacia z negativas y en una vista superior como la del diagrama la corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.
Utilizando la expresión $\vec{F}=I(\vec{l}\,x\,\vec{B})$ vemos que el sentido de la fuerza es en la barra A es opuesto a su movimiento, y en la barra B la dirige hacia x positivas; cualitativamente las fuerzas se oponen al aumento de flujo intentando aproximar las barras entre sí y reducir la superficie asociada al flujo.
Como la corriente y el campo magnético son perpendiculares, en módulo podemos plantear que en cada barra F=ILB.

El valor de I lo podemos deducir de la ley de Ohm $I=\frac{V}{R_{total}}=\frac{B\cdot L\cdot(v_A-v_B)}{2R}$

Por lo que tenemos $F=ILB=\frac{B^2\cdot L^2\cdot(v_A-v_B)}{2R}$

Aplicamos segunda ley de Newton a cada barra; la masa m es la misma para ambas barras, pero no la fuerza total sobre cada una ni la aceleración de cada una.

No podemos afirmar que la fuerza y la aceleración sea constante y sean MRUA, pero sí que se ve que la barra A se irá frenando porque la frena la fuerza de rozamiento y la fuerza magnética y la barra B cada vez se moverá más despacio porque al frenarse la barra A la variación de flujo es menor. Si la barra A se frenase del todo antes que la B, la única variación de flujo será asociada al movimiento de la barra B que se movería por su inercia, y en ese momento la barra B hará que se mueva la barra A: planteamos la velocidad de la barra B solamente asumiendo que la barra A no se detiene.

Barra A: $-F_{mag}-F_{roz}=m\cdot a_A \Rightarrow -\frac{B^2\cdot L^2\cdot(v_A-v_B)}{2R}-\mu\cdot m\cdot g=m\cdot a_A$

Barra B: $F_{mag}-F_{roz}=m\cdot a_B \Rightarrow \frac{B^2\cdot L^2\cdot(v_A-v_B)}{2R}-\mu\cdot m\cdot g=m\cdot a_B$

Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales, ya que a=dv/dt

Queremos tener una expresión para la v_B, intentamos expresar v_A y a_A en función de la barra B

Operando

La primera $v_B=v_A+\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(a_A+\mu\cdot g)$ (1)

La segunda $v_B=v_A-\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(a_B+\mu\cdot g)$ (2)

Si para despejar a_A sumamos las dos expresiones iniciales, obtenemos una relación 3 que no aporta nada respecto haber restado estas dos últimas expresiones 1 y 2.

$-2\mu\cdot \cancel{m}\cdot g=\cancel{m}\cdot(a_A+a_B)$

$a_A=-2\mu\cdot g-a_B$ (3)

Si derivamos las expresiones 1 y 2

$a_B=a_A+\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(\frac{da_A}{dt})$ (4)

$a_B=a_A-\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(\frac{da_B}{dt})$ (5)

Llegamos a una expresión que también poemos obtener derivando la expresión 3 $\frac{da_A}{dt}=\frac{-da_B}{dt}$

Combinando expresiones 3 y 5, y reordenando

$$a_B=-2\mu\cdot g-a_B-\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(\frac{da_B}{dt})$$

$$\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(\frac{da_B}{dt})+2a_B+2\mu\cdot g=0$$

Se trata de una ecuación diferencial "ordinaria lineal de primer orden" Ax'+Bx + C = 0

donde $A=\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m; B=2; C=2\mu\cdot g$ que tiene como solución $x(t)=c_1e^{\frac{-B}{A}t}-\frac{C}{B}$

http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+Ax%27%28t%29+%2B+Bx%28t%29+%2B++C%3D0

Sustituyendo en este caso $a_B(t)=c_1e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}-\mu g$

Durante el examen la resolución de la ecuación diferencial habría que hacerla paso a paso, es una ecuación separable

$$\frac{dx}{dt}+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0\Rightarrow\frac{dx}{\frac{-Bx-C}{A}}=dt\Rightarrow A\int\frac{-dx}{Bx+C}=\int dt\Rightarrow-\frac{A}{B}\ln\frac{Bx+C}{C}=t+cte_1$$

$$\frac{B}{C}x+1=e^{\frac{-B}{A}t}\cdot e^{\frac{-B}{A}cte_1}\Rightarrow x=\frac{C}{B}\left(cte_2\cdot e^{\frac{-B}{A}t}-1\right)=cte_3\cdot e^{\frac{-B}{A}t}-\frac{C}{B}$$

Se nos pide la velocidad, luego integramos. Tenemos como condición inicial que $v_B(t=0)=0$

$$\int_0^t d\,v_B(t)=c_1\int_0^t e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}dt-\int_0^t \mu g\,dt$$

$$v_B(t)=c_1\left[\frac{-Rm}{B^2L^2}e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}\right]_0^t-\mu g t$$

$$v_B(t)=c_1\left[\frac{-Rm}{B^2L^2}e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}+\frac{Rm}{B^2L^2}\right]-\mu g t$$

$$v_B(t)=c_1\frac{Rm}{B^2L^2}(1-e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

Utilizamos la condición inicial $v_B(t=0)=c_1\left[\frac{-Rm}{B^2L^2}+\frac{Rm}{B^2L^2}\right]-\mu g t=0$

Se cumple para cualquier valor de c_1 .

Utilizamos la relación (2) entre v_A y v_B y la condición inicial en v_A.

$$v_A=v_B+\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(a_B+\mu\cdot g)$$

$$v_A=c_1\left[\frac{-Rm}{B^2L^2}e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}+\frac{Rm}{B^2L^2}\right]-\mu g t+\frac{2R}{B^2L^2}\cdot m(c_1 e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}-\mu g+\mu g)$$

$$v_A=c_1\left(\frac{Rm}{B^2L^2}e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t}+\frac{Rm}{B^2L^2}\right)-\mu g t$$

$$v_A=c_1\frac{Rm}{B^2L^2}(1+e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

$$v_A(t=0)=v_{A0}=c_1\frac{Rm}{B^2L^2}(1+1)\Rightarrow c_1=v_{A0}\frac{B^2L^2}{2Rm}$$

(Validamos que con esa c_1 en la expresión final de v_A, para t=0 la velocidad es v_{A0})

$$v_A=(v_{A0}\frac{B^2L^2}{2Rm})\frac{Rm}{B^2L^2}(1+e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

$$v_A=\frac{v_{A0}}{2}(1+e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

$$V_A(t=0)=v_{A0}[ok]$$

Sustituyendo

$$v_B(t)=(v_{A0}\frac{B^2L^2}{2Rm})\frac{Rm}{B^2L^2}(1-e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

$$v_B(t)=\frac{v_{A0}}{2}(1-e^{\frac{-B^2L^2}{Rm}t})-\mu g t$$

Con los valores numéricos y en unidades SI $v_B(t)=\frac{5}{2}(1-e^{\frac{-0{,}25^2\cdot 2^2}{5\cdot 50}t})-2\cdot 10^{-5}\cdot 9{,}8t$

$$v_B(t)=2{,}5(1-e^{-10^{-3}t})-1{,}96\cdot 10^{-4}t[v\,en\,m/s, t\,en\,s]$$