



(Se incluye el enunciado original tomado de las oposiciones, aunque en el año 2015 no dejaron sacar el enunciado a los opositores, de hecho cada enunciado va en una hoja y obligan a comenzar la resolución en la propia hoja del enunciado y entregarla. El enunciado incluía un diagrama, que se incluye en la misma escala, lo que es relevante en el desarrollo. En el examen no dejaban regla; un opositor lo preguntó casualmente antes de abrir sobre de problemas y dijeron que “no hacía falta, si había que hacer algo se podía hacer a mano alzada”))

### EJERCICIO PRÁCTICO ESPECIALIDAD: **FÍSICA Y QUÍMICA**

El aspirante comenzará a realizar el ejercicio práctico en el mismo folio del enunciado

#### CRITERIOS DE CORRECCIÓN

En los problemas se valorará la adecuada estructuración y el rigor en el desarrollo de su resolución y la inclusión de pasos detallados así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas. Se tendrá especial rigor en la identificación de los principios y leyes físicas involucradas, la corrección de los resultados numéricos, el uso correcto de unidades, así como con los errores en la formulación, nomenclatura y lenguaje químico.

#### PROBLEMA 2.

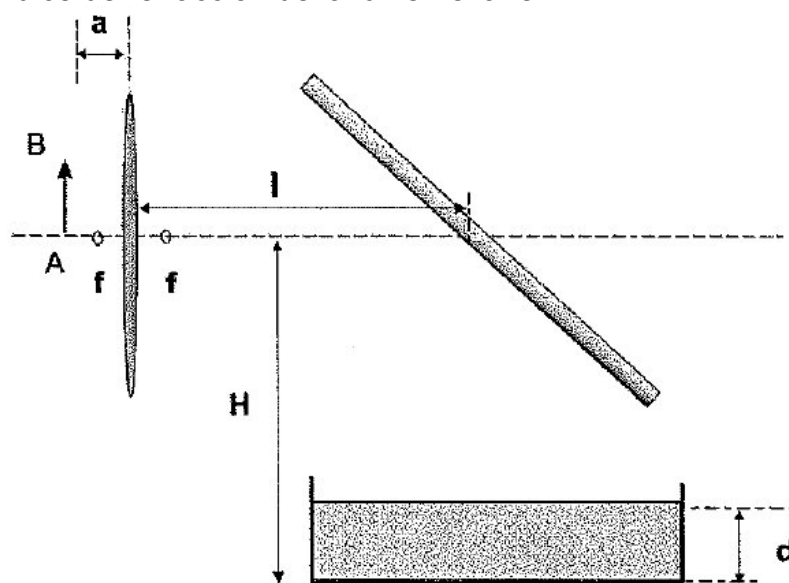
Un objeto AB se encuentra a una distancia de  $a = 36$  cm de una lente convergente con distancia focal  $f = 30$  cm.

Se pide:

- Determinar gráfica y analíticamente la posición de la imagen del objeto AB que daría la lente con respecto a ella. ¿Se podría recoger en una pantalla? ¿por qué?
- Si a continuación se coloca a una distancia  $l = 1$  m detrás de la lente un espejo plano, inclinado  $45^\circ$  con relación al eje óptico.
  - Determinar gráfica y analíticamente la posición de la nueva imagen. ¿Se podría recoger en una pantalla?
  - ¿A qué distancia  $H$  del eje óptico es necesario colocar el fondo de una cubeta con agua para obtener en él una imagen nítida del objeto? La profundidad del agua en la cubeta es  $d = 20$  cm.

DATOS: Índice de refracción de la luz en el agua =  $4/3$

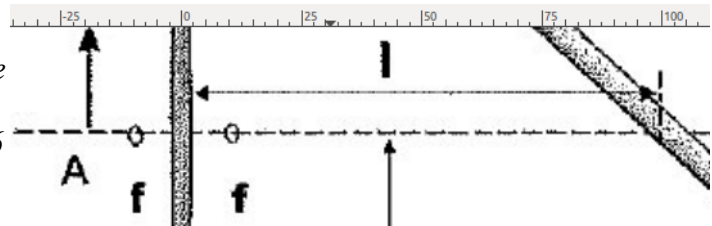
Índice de refracción de la luz en el aire =  $1$



**(Puntuación máxima por apartado: a) 1 punto, b<sub>1</sub>) 2 puntos, b<sub>2</sub>) 7 puntos)**



Comentario inicial: la imagen del enunciado no está a escala correcta según los datos del enunciado, y usa  $f$  tanto para foco objeto como imagen, cuando según convenio de signos DIN 1335 deberían ser  $f$  y  $f'$ . Se puede ver como si se toma  $|OF| \approx 30$  cm según enunciado, entonces  $|OA| \approx 60$  cm (no los 36 cm del enunciado) y se tendría  $|I| \approx 300$  cm (no 1 m del enunciado)

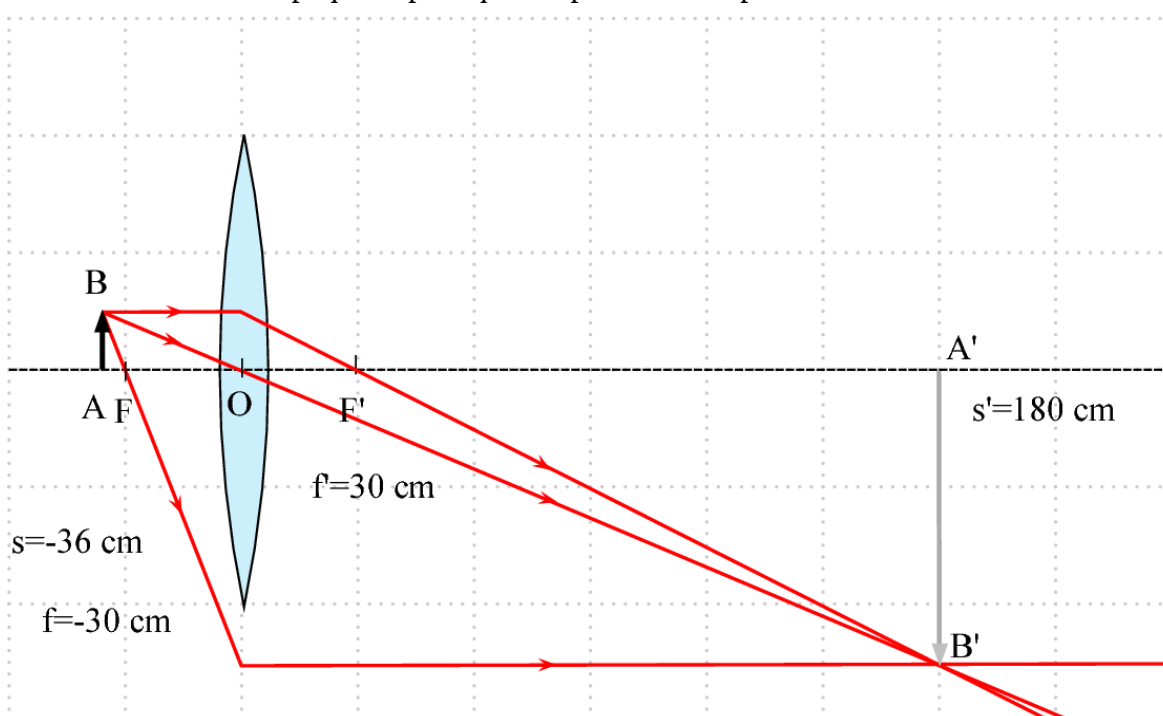


a) Utilizando convenio de signos DIN 1335, se tiene  $s = -36$  cm y para una lente convergente  $f' = 36$  cm. Utilizando la ecuación de la lente

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-36} = \frac{1}{30} \Rightarrow s' = 180 \text{ cm} \quad \text{Posición imagen } s' = 180 \text{ cm}$$

La imagen (no considerando el espejo del diagrama del enunciado en este apartado, ya que enunciado de apartado a no lo indica y se pide considerarlo en apartado b1) **sí se puede recoger sobre una pantalla**, ya que es una imagen real formada por la prolongación de los rayos en su recorrido directo saliendo del objeto y pasando por el elemento óptico.

Realizamos el **trazado de rayos**, en la escala aproximada del diagrama original y comentamos sobre él la aproximación paraxial, aproximación que es necesaria para que sean válidas las expresiones utilizadas; como enunciado no indica tamaño del objeto, en principio se puede tomar el objeto lo suficientemente pequeño para que la aproximación paraxial sea válida.



b<sub>1</sub>) Como el espejo está a 100 cm a la derecha pero según apartado a la imagen de la lente se forma a 180 cm, la imagen queda detrás del espejo, por lo que realmente no se forma imagen por el espejo, sino que los rayos en su propagación se reflejan en el espejo y se forma una imagen por reflexión en el espejo.

Cualitativamente se ve que el rayo que sale del punto A del objeto va a propagarse a través del eje óptico, incidirá en el espejo formando  $45^\circ$  con la normal al espejo, y saldrá reflejado formando  $45^\circ$  con la normal al espejo y se propagará en el diagrama verticalmente de arriba hacia abajo en dirección al recipiente con agua, por lo que en esa línea estará el punto A'. Sin embargo también se ve cualitativamente que en función del tamaño del objeto, la imagen B' asociada al punto B puede formarse al menos parcialmente fuera del espejo, por lo que sí habría formación de una imagen



virtual en el espejo. Como el ángulo del espejo son  $45^\circ$ , está a 100 cm de la lente, y la posición de la imagen  $s'=180$  cm, se puede ver fácilmente que si el tamaño de la imagen fuese  $y'=80$  cm, el punto B' se formaría sobre el propio espejo, y que para imágenes mayores se formaría imagen virtual en el espejo.

Utilizando la ecuación de aumento para espejos podemos plantear

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow \frac{-80}{y} = \frac{180}{-36} \Rightarrow y = 16 \text{ cm}$$

Si el tamaño del objeto es mayor de 16 cm, parte de la imagen sí se formará delante del espejo.

El tema clave (y que no se cumple en absoluto en la escala del diagrama aportado originalmente en el enunciado) es validar la aproximación paraxial: en el enunciado no se indica tamaño del objeto.

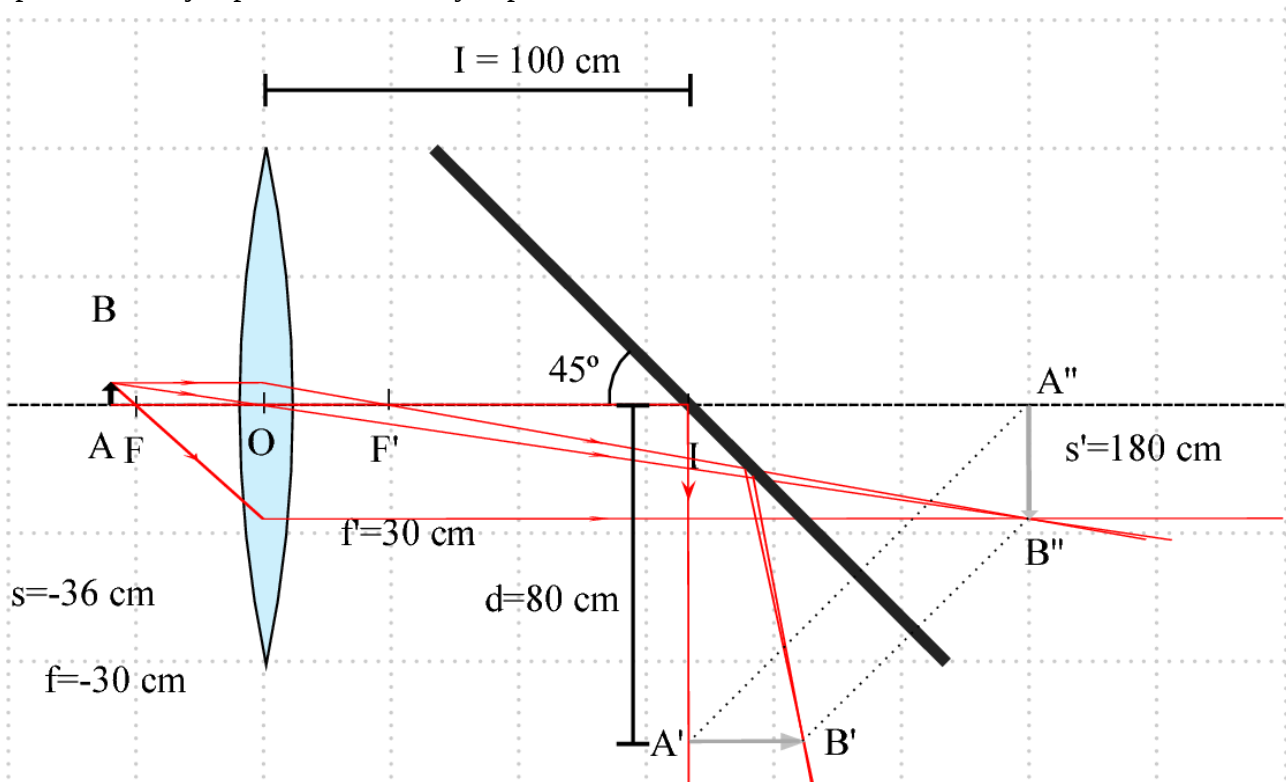
La aproximación paraxial permite aproximar para  $\theta$  en rad  $\tan(\theta) \approx \theta$ ,  $\sin(\theta) \approx \theta$ , y  $\cos(\theta) \approx 1$ . Como en el trazado un rayo suele ir de objeto a centro, un ángulo esencial el que tiene como tangente (altura objeto)/foco,  $y/f$ . El error es del 1% tanto en  $\sin$  como  $\tan$  para  $0,176$  rad ( $\approx 10^\circ$ )

En este caso como  $f=30$  cm,  $y/30=0,176 \rightarrow y=5,28$  cm

Luego manteniendo la aproximación paraxial el tamaño máximo del objeto garantiza que la imagen que forma la lente se forma completamente detrás del espejo, y no hay que tener en cuenta una formación parcial de imagen. **La imagen se formará a una distancia  $d=80$  cm en la vertical del eje óptico**, ya que cualitativamente con la aproximación paraxial podemos pensar en los rayos "casi paralelos" al eje óptico. se podrá Para validarlo, consideramos el caso más desfavorable,  $y=5,28$  cm, luego  $y'=-26,4$  cm, y vamos a realizar una representación a escala, donde cada cuadrícula son 30 cm. Analíticamente podemos decir  $A' = (100, -80)$  y  $B'=(100+y, -80)$ .

La imagen **sí se puede recoger sobre una pantalla**, ya que es una imagen real formada por la prolongación de los rayos en su recorrido directo saliendo del objeto y pasando por el elemento óptico.

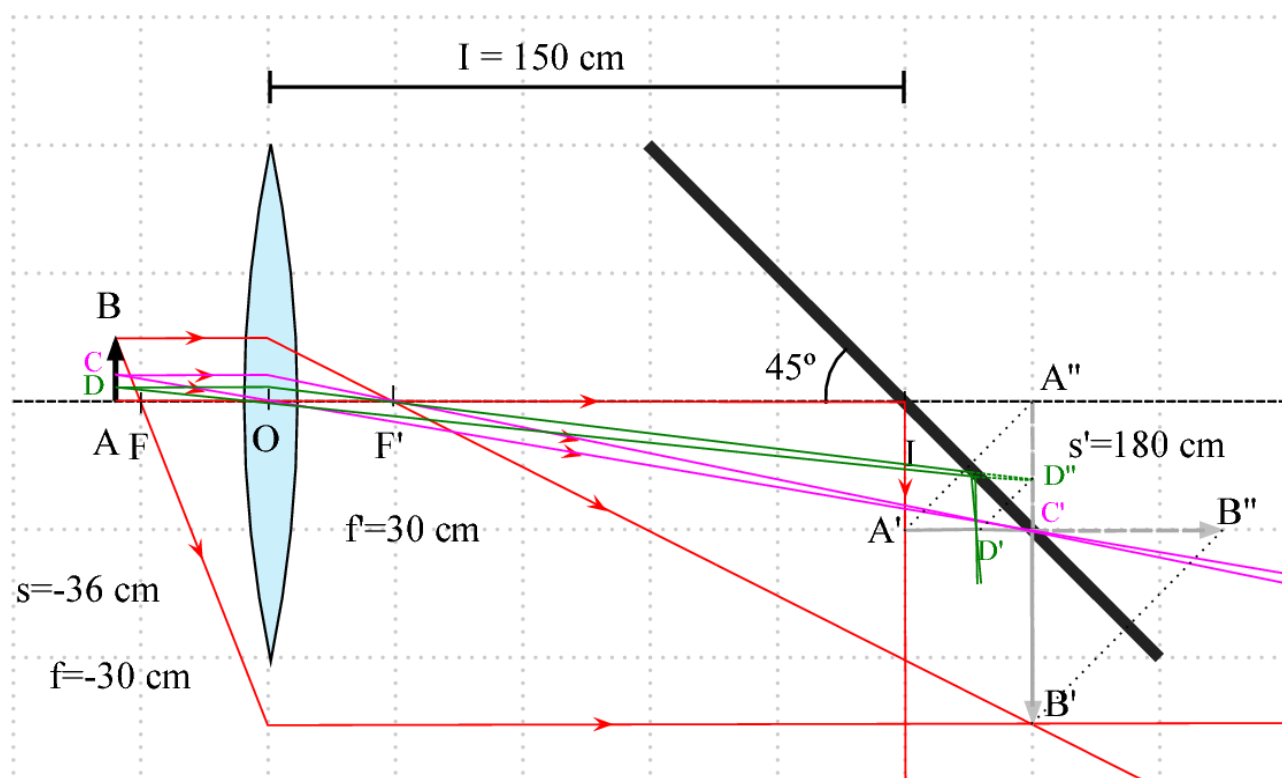
Realizamos el **trazado de rayos** con el espejo a 1 m y vemos que la imagen queda totalmente detrás, y que a esta escala el objeto es muy pequeño y el trazado de rayos complicado, pero se ve que la reflexión en el espejo de los rayos provenientes del punto B se realiza en un punto que no se puede aproximar al eje óptico como los rayos provenientes de A.





>Trato aquí un caso aparte (no es necesario en este problema, pero puede surgir la duda y de hecho yo gasté inutilmente un rato pensando en esto en el examen porque la escala del enunciado lleva a realizar un trazado de rayos donde me surgía explicar esto), es cómo tratar esa formación parcial de la imagen delante del espejo, por ejemplo porque la formación de la imagen estuviera muy próxima al espejo. En el diagrama que hice a mano intentando reproducir el original del examen con el espejo a 1 m salía así si se prolongaba el espejo, pero se incluye un diagrama de ejemplo más claro del caso en el que el espejo estuviese a 150 cm de la lente. Es interesante plantear que aunque en la formación de imágenes se tome solamente los puntos A y B en extremos del objeto, se puede hacer el trazado de rayos para cualquier punto del objeto. Se incluye trazado para puntos C y D, y se ve como al haber un espejo, una vez que se forme el objeto o parte de él delante del objeto por la convergencia de rayos, se debe formar una imagen virtual detrás del espejo de la parte de la imagen que quede delante.

Se incluye trazado de rayos con distintos colores, que es algo denso y confuso; no se ha respetado la escala asociada a la aproximación paraxial, ya que con ella sería todavía más denso y poco legible.



b<sub>2</sub>) La separación entre aire y agua es un dioptrio plano, que es un nuevo elemento óptico. La idea básica es que para tratar elementos ópticos usamos superposición: tratamos el efecto de solamente el primero para obtener una imagen (la que forma el espejo inclinado 45° obtenida en b<sub>1</sub>) y luego utilizando esa imagen como objeto del segundo elemento óptico (el dioptrio plano) sin tener en cuenta el elemento óptico anterior obtenemos la nueva imagen, pensando en un dioptrio plano en general, pero teniendo en cuenta la profundidad del recipiente que tiene agua.

Enunciado indica "...para obtener en él [en el fondo de la cubeta] una imagen nítida del objeto" (imagen formada por el dioptrio), tomamos nuevo sistema de referencia DIN 1335 con centro óptico en la separación aire-agua.

Surge la duda de hacia donde está dirigido el eje x en este sistema de referencia:

- En el sentido de propagación de los rayos que provienen del espejo, entrando hacia el agua, tendríamos imagen a la derecha del centro óptico y sería imagen con valor de  $s'$  positiva.
- En el sentido en el que el objeto presentado al dioptrio está en  $x$  negativas (sería valor de  $s$  negativo que es lo habitual), y tendríamos imagen con valor de  $s'$  negativa (en el dioptrio plano



objeto e imagen están en el mismo lado del dioptrio y tienen mismo signo).

El criterio a tomar lo fija la norma DIN 1335, que dice explícitamente (norma original en alemán "DIN 1335 Geometrische Optik - Bezeichnungen und Definitionen", versión 2003-12, apartado 3.1 Koordinatensysteme, Lichtrichtung) "*La dirección de salida de la luz en su propagación ... antes de una posible reflexión es por convención siempre de izquierda a derecha (dirección original de la luz)*"

Otra referencia que confirma el mismo criterio: "*todas las fórmulas utilizadas consideran que la luz viaja de izquierda a derecha. Debe esquematizarse el problema de manera que la luz incida de izquierda a derecha.*" (Jaume Escofet, Asignatura Óptica Geométrica e Instrumental, Escuela Universitaria de Óptica de Tarrasa, Universidad Politécnica de Cataluña [Problemas asociación de dioptrio y espejo, cc-by-nc-nd](#))

Por ello, de acuerdo a convenio DIN 1335, el primer medio es el aire, por lo que  $n=1$  y  $n'=4/3$ , y tomamos  $s$  y  $s'$  positivas, lo que llama la atención: lo habitual es que la posición del objeto  $s$  está a la izquierda del centro óptico, pero en este caso no es así: prevalece el sentido de propagación de los rayos de izquierda a derecha frente a que la posición del objeto esté en  $x$  negativas.

El signo entre  $s$  y  $s'$  no permite distinguir imagen de objeto, y surge ahora una nueva duda; si el fondo del recipiente a 20 cm es la posición de la imagen o es la posición del objeto, ya que:

-En el dioptrio plano con objeto situado en el fondo de un recipiente produce una imagen que está más cerca de la superficie; es asociable a la situación conocida de que, para un observador fuera del agua, la distancia aparente con la que se ven objetos dentro del agua es menor a la real. Según esta idea, el fondo sería la posición del objeto.

-Enunciado habla de imagen en el fondo, ya que hace referencia a imagen en el punto donde convergen los rayos en su propagación (en apartados a y b se pregunta sobre si la imagen se puede recoger en una pantalla). Según esta idea, el fondo sería la posición de la imagen.

La primera opción no es válida, ya que nunca se produciría una imagen en el fondo del recipiente, ya que el objeto tendría que estar más allá del fondo, lo que no es válido aunque pensemos en utilizar superposición y un dioptrio plano "genérico sin considerar su profundidad", sí hay que considerar el fondo, ya que más allá de un fondo opaco no se formaría objeto al igual que no se forma detrás del espejo de apartado b.

Tomando  $s'=20$  cm como posición de imagen en el fondo, y utilizando las ecuaciones del dioptrio plano, calculamos  $s$  que es la posición del objeto de partida que se ha formado, según el sistema de referencia elegido, antes de aplicar superposición

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{4/3}{20} \Rightarrow s = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15 \text{ cm}$$

Es decir que el objeto para este dioptrio plano, que es la imagen producida por la reflexión de la imagen producida por la lente en el espejo, se debe formar a 15 cm dentro del agua, que es a 5 cm de la superficie.

Para que el objeto esté a 15 cm de la superficie de separación aire-agua, como la distancia  $H = 80$  cm y la profundidad de agua es  $h = 20$  cm, tenemos

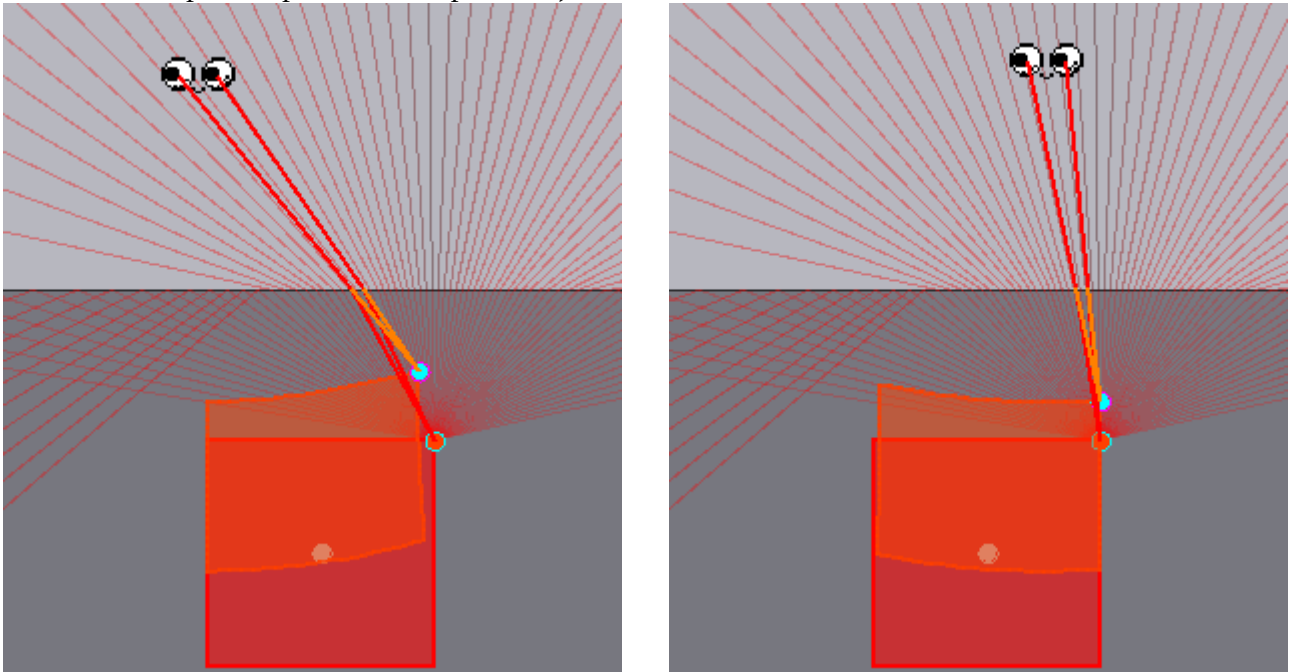
$$H = d - 15 + h \rightarrow H = 80 - 15 + 20 = \mathbf{85 \text{ cm.}}$$

*Es relevante que este apartado vale 7 puntos sobre 10 del total del ejercicio, por lo que si en los anteriores se ha intentado aportar detalles, todavía son más importantes en este para dejar clara la resolución, así que se incluyen estas disgresiones, aunque no se piden en el enunciado. De hecho este ejercicio es confuso e inicialmente puse una resolución incorrecta, con trazados erróneos, ya que hacerlos "a mano alzada", aunque luego se pasen a ordenador, puede llevar a error.*

*Se pueden buscar imágenes en las que se aprecia que un objeto en el fondo del agua es visualizado desde el aire a una profundidad menor; en lugar de incluir una imagen en concreto se incluyen dos imágenes asociadas a una simulación interactiva, donde se muestra un objeto con tamaño (un*



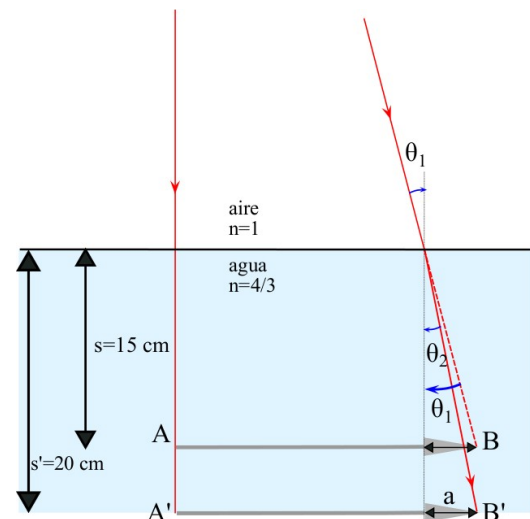
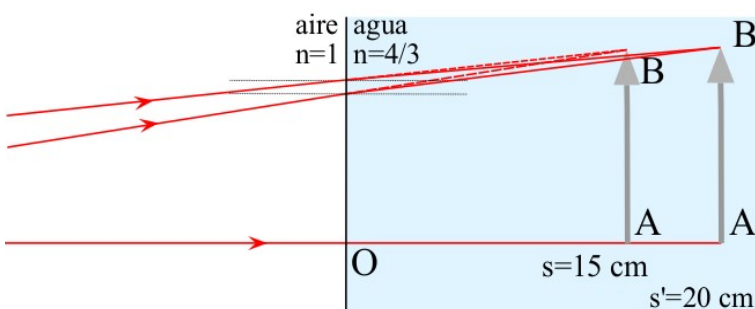
cuadrado) y se aprecia que cuando no hay aproximación paraxial sí hay deformación y un aumento no exactamente igual a 1, que es al aumento del dioptrio plano bajo aproximación paraxial (en lo relativo al punto analizado y la posición observador: en la escala representada no todo el objeto cuadrado cumple la aproximación paraxial).



NTNUJAVA Virtual Physics Laboratory ([enlace a simulación interactiva](#)) Izquierda situación no paraxial, derecha sí paraxial

El enunciado no pide un trazado de rayos explícitamente, ya que de hecho en un dioptrio plano el aumento es 1 y no se suele realizar trazado de rayos en dioptrios planos, pero lo realizamos primero solamente para el dioptrio, enlazando con el trazado de rayos realizado en apartado b<sub>1</sub> donde los rayos llegaban al agua con cierta inclinación.

Representamos las rectas normales en los puntos donde los rayos realizan el cambio de medio y representamos cualitativamente de manera que para mayor índice de refracción el rayo esté más próximo a la normal.



Se puede hacer el mismo razonamiento también con la ley de Snell, asumiendo la aproximación paraxial con lo que tenemos que  $AB = A'B'$ , y que para ángulo de incidencia  $\theta_1$  y para refractado  $\theta_2$  se cumple  $\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$ , por lo que sobre el diagrama podemos plantear

$$\text{tg } \theta_1 = a/s$$

$$\text{tg } \theta_2 = a/s'$$

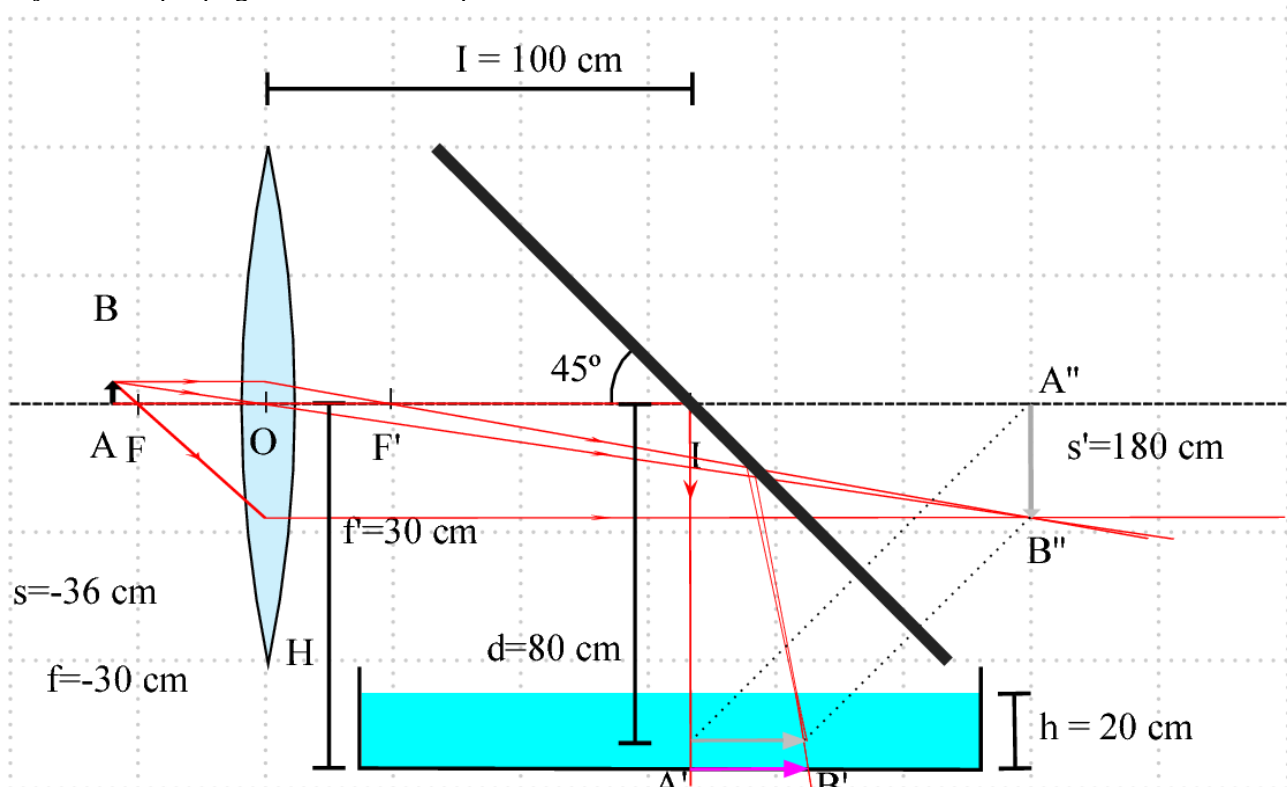
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow 1 \frac{a}{s} = \frac{4}{3} \frac{a}{s'} \Rightarrow s = \frac{3}{4} s' = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15 \text{ cm}$$

Incluimos también un trazado de rayos global, donde de nuevo la representación de rayos es densa, y algunos rayos se representan más finos para distinguirse. Hacerlo a mano alzada es confuso;





enlazando con las imágenes mostradas anteriores, se tiene que tener presente que la prolongación de los rayos procedentes del aire convergen en un punto más próximo a la superficie que los rayos refractados dentro del agua, que lo hacen a más distancia de la superficie. También es confuso el concepto de imagen y objeto: en las imágenes mostradas anteriores el observador está en el aire, y la imagen es el objeto que está más cerca de la superficie (asociable a la situación conocida de que, para un observador fuera del agua, la distancia aparente con la que se ven objetos dentro del agua es menor a la real) y el objeto es el más lejano a la superficie, pero en este caso es el objeto el más cercano a la superficie y la imagen el más lejano: la imagen es la asociada al cruce de los rayos en su propagación una vez refractados.



Con estos trazados se aprecia que el aumento no es exactamente 1, y puede surgir la duda de por qué si hemos usado un dioptrio plano el aumento no es 1, cuánto difiere de 1, y si ese aumento depende del tamaño del objeto de partida. Cualitativamente se ve que la razón es que el elemento óptico anterior al dioptrio no es realmente la lente, sino el espejo formando  $45^\circ$  que junto al tamaño del objeto original hace que los rayos asociados al punto B lleguen a la superficie de separación aire-agua con cierto ángulo (no ocurre para los rayos asociados al punto A). Pero al mismo tiempo si pensamos en la aproximación paraxial (el tamaño de objeto original es pequeño), ese rayo es “casi paralelo” al rayo asociado al punto A, por lo que el aumento es “casi 1”. Se podría intentar coger unos valores concretos y realizar los cálculos, comprobando que el uso de la ecuación del dioptrio es válido. También se podría realizar de manera genérica en función del tamaño original de la imagen, pero es un desarrollo largo y no se hace porque no se pide, aunque se comenta por encima como sería.

Para los rayos asociados al punto B habría que usar la ley de Snell de la refracción y la geometría de la situación para calcularlo, y dejarlo en función del tamaño del objeto de partida.

Habría que calcular la coordenada x del punto de impacto del rayo que sale del punto B en el espejo inclinado  $45^\circ$ . Llamamos t al tamaño objeto (segmento AB) para no confundir y de tamaño con y de coordenada.

El rayo proveniente de B tras pasar por la lente es la recta que pasa por el punto (30,0) y por el punto (180,-5t)



$$\frac{x-30}{180-30} = \frac{y-0}{-5t-0} \Rightarrow (x-30)(-5t) = 150y \Rightarrow y = t - \frac{x}{30}$$

El espejo es la recta que pasa por el punto (100,0) y tiene una pendiente -1

$$y = mx + n \Rightarrow y = -x + n \Rightarrow 0 = -100 + n \Rightarrow n = 100 \Rightarrow y = -x + 100$$

Igualemos ambas ecuaciones:

$$t - \frac{x}{30} = -x + 100 \Rightarrow \frac{29}{30}x = 100 - t \Rightarrow x = \frac{30}{29}(100 - t)$$

El rayo asociado a este rayo anterior que sale de este punto del espejo tras la reflexión es la recta que pasa por ese punto y por el punto donde se forma la imagen original, que es (-80, 100+5t).  
 Calcularíamos la ecuación de esta recta, y con ella el ángulo que forma con la normal a la superficie de separación aire-agua.

Aplicando la ley de Snell de refracción calcularíamos el ángulo asociado al rayo refractado, con lo que tendríamos la ecuación de ese rayo. Hallando el punto de corte de ese rayo con el fondo del recipiente con agua (recta  $y = -73,3$ ) podríamos saber el tamaño de la nueva imagen formada. Se podría validar que si  $t$  es muy pequeño, el aumento debe ser aproximadamente 1.

Referencias:

[http://www.fisica.ru/2017/theory/22\\_optica\\_instrumentos.php](http://www.fisica.ru/2017/theory/22_optica_instrumentos.php)

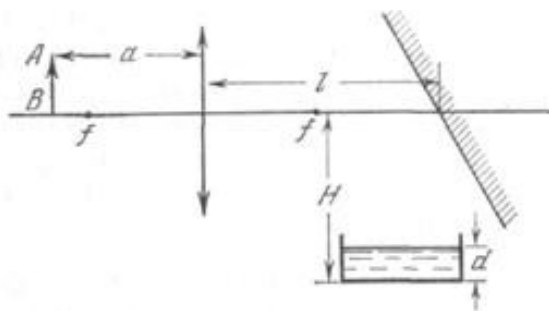
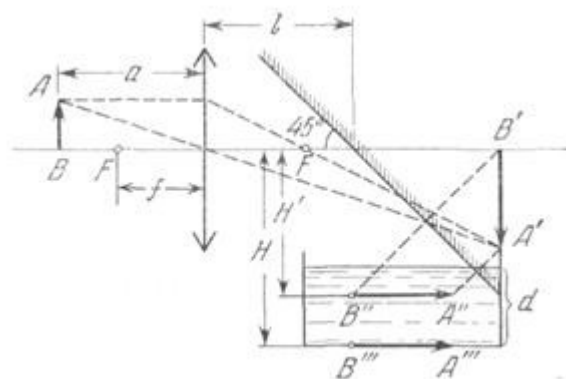


Fig. 256



Ejercicio 771 donde se incluye figura 256, y coinciden los datos pero no la escala de la figura

Un objeto AB se encuentra a una distancia  $a = 36$  cm de una lente con distancia focal  $f = 30$  cm. A una distancia  $l = 1$  m, detrás de la lente está instalado un espejo plano, inclinado en  $45^\circ$  con relación al eje óptico (fig. 256). ¿A qué distancia  $H$  del eje óptico es necesario colocar el fondo de una cubeta con agua para obtener en él una imagen nítida del objeto? La profundidad del agua en la cubeta es  $d = 20$  cm.