enrique@fiquipedia.es Revisado 17 enero 2021

PRUEBA DE CARÁCTER PRÁCTICO PARA INGRESO AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA DE FÍSICA Y QUÍMICA. BADAJOZ, 20 DE JUNIO DE 2015

FÍSICA

1. Un depósito cilíndrico tiene una altura de 1,5 metros y el radio de su base es 0,85 metros. Su masa vacío es 3 kg. Este depósito vacío, en posición vertical, y abierto por su parte superior, se deslizaba sin rozamiento sobre una superficie horizontal, con movimiento rectilíneo y velocidad constante de 2,7 km/h. En cierto instante, empezó a caer una lluvia perpendicular a la superficie sobre la que el depósito se movía. De forma constante caían 2 litros de agua por m^2 cada hora, y el depósito durante su movimiento estuvo bajo esa lluvia.
Supongamos que en todo momento (antes de llover y durante la lluvia), en la dirección del movimiento del depósito no existiera fuerza alguna actuando sobre el depósito. En ese supuesto, realice usted los cálculos necesarios para contestar a las siguientes preguntas:
a. ¿Cuál sería la ecuación que expresaría la velocidad del depósito en función del tiempo, desde que empieza a llover hasta que se llena de agua, de forma que la velocidad quede expresada en m/s? (0,5 puntos)
b. ¿Cuál sería la ecuación de la posición en función del tiempo, desde que empieza a llover hasta que se llena de agua, de forma que la posición quede expresada en metros? (0,3 puntos)
c. ¿Cuál sería el valor de la velocidad del depósito, expresada en m/s, justo en el momento en que éste se llenó totalmente de agua? (0,2 puntos)
Datos: Π= 3,14 ; d_{agua} = 1 g/mL = 1 g/cm^3.

El dato del enunciado de π=3,14 (que hubiera sido más lógico como π≈3,14) lo interpretamos como considerar en los cálculos tres cifras significativas.
a) Como no actua ninguna fuerza en la dirección del movimiento, se frena por conservación de momento lineal, ya que se va incorporando masa que no lleva velocidad horizontal.
Llamamos M a la masa del cilindro, que inicialmente va a v_0=2,7 km/h=0,75 m/s
Como p=cte, $p_{inicial}=p_{final}$, y se puede plantear de dos maneras equivalentes:
--Inicialmente tenemos masa M a velocidad v_0 y ahí está todo el momento lineal inicial, por lo que llamando m a la masa en un instante t, podemos plantear directamente $M\cdot v_0=m\cdot v$
--En un instante de tiempo cualquiera, tenemos una masa m a velocidad v, y al incorporarse una gota de agua de masa dm y velocidad horizontal 0, la velocidad horizontal variará en dv.
Planteamos dv como positivo, de modo que un valor negativo suponga que la velocidad disiminuye.
m·v=(m+dm)(v+dv)

$$\cancel{m\cdot v}=\cancel{m\cdot v}+dm\cdot v+m\cdot dv+dm\cdot dv$$

(despreciando el término dmdv)

$$-dm\cdot v=m\cdot dv\Rightarrow-\frac{dm}{m}=\frac{dv}{v}\Rightarrow\int_M^m\frac{-dm}{m}=\int_{v_0}^v\frac{dv}{v}\Rightarrow\ln\left(\frac{M}{m}\right)=\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)\Rightarrow\frac{M}{m}=\frac{v}{v_0}\Rightarrow M\cdot v_0=m\cdot v$$

De ambas maneras se obtiene la misma expresión $M\cdot v_0=m\cdot v$

Como se pide velocidad, tenemos $v=\frac{M\cdot v_0}{m}$

Necesitamos una expresión en función del tiempo; expresamos cómo varía la masa de agua en función del tiempo.
La superficie de la base del cilindro es $S=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 0{,}85^2=2{,}27\ m^2$

La tasa de llenado que llamamos T es $T=\frac{2\cancel{L}}{\cancel{m^2}\cdot\cancel{h}}\cdot\frac{1\,kg}{\cancel{L}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}\cdot 2{,}27\,\cancel{m^2}=1{,}26\cdot 10^{-3}\,kg/s$

Como la tasa de llenado es constante, la masa del cilindro a lo largo del tiempo es

$m_{total}=m_{inicial}+T\cdot t=3+1{,}26\cdot 10^{-3}\cdot t$

Sustituyendo

$$v=\frac{M\cdot v_0}{M+T\cdot t}[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

Validación física:

Si t=0, $v=v_0$

Si t=∞, v=0.

Sustituyendo valores

$$v=\frac{2{,}25}{3+1{,}26\cdot 10^{-3}\cdot t}[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

b) Como nos piden ecuación posición y tenemos ecuación de velocidad planteamos v=dx/dt

$$\frac{dx}{dt}=\frac{M\cdot v_0}{M+T\cdot t}\Rightarrow dx=\frac{M\cdot v_0}{M+T\cdot t}dt\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^t\frac{2{,}25}{3+1{,}26\cdot 10^{-3}\cdot t}dt$$

$$x=\frac{M\cdot v_0}{T}\ln\left(\frac{M+T\cdot t}{M}\right)=\frac{M\cdot v_0}{T}\ln\left(1+\frac{T}{M}t\right)$$

Validación física:

Si t=0, x=0

Si T=0, $x=v_0\cdot t$ (es una indeterminación, pero realizando aproximación series de Taylor, ln(1+x)≈x, luego $x\approx v_0\frac{M}{T}\left(\frac{T}{M}t\right)=v_0 t$)

Sustituyendo los valores tenemos

$$x=1{,}78\cdot 10^3\ln\left(1+4{,}2\cdot 10^{-4}t\right)[x\,en\,m,t\,en\,s]$$

c) Calculamos el tiempo que tarda en llenarse,

El volumen total del cilindro es S·h=2,27·1,5=3,41 m^3 y como se llena de agua, supone $3{,}41\cdot 10^3$ kg de agua un vez lleno.

Como sabemos la tasa de llenado

$$m_{agua}=T\cdot t\Rightarrow 3{,}41\cdot 10^3=1{,}26\cdot 10^{-3}\cdot t\Rightarrow t=\frac{3{,}41\cdot 10^3}{1{,}26}\cdot 10^{-3}=2{,}70\cdot 10^6\,s\approx 752\,h$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad

$$v\left(t=2{,}7\cdot 10^6\right)=\frac{2{,}25}{3+1{,}26\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}7\cdot 10^6}=6{,}6\cdot 10^{-4}\,m/s$$

Disgresión final adicional: ¿sería válido un planteamiento de conservación de energía en lugar de con conservación de momento lineal?

Un problema se puede resolver con varios planteamientos, y si son completos y correctos deben llevar al mismo resultado, por lo que comento esta pregunta que considero interesante: si se plantea el "teorema de las fuerzas vivas", y que dado que las fuerzas externas no realizan trabajo, la variación de energía cinética es nula y no hay variación de energía cinética, lo que lleva a $½M\cdot v_0^2=½m\cdot v^2$ y lleva a $M\cdot v_0^2=m\cdot v^2$, que es distinto a lo obtenido con momento lineal $M\cdot v_0=m\cdot v$, a cuando planteamientos distintos deben llevar a lo mismo, por lo que uno de los dos planteamientos no es completo y/o correcto.

La energía se conserva (es la definición de energía, no una propiedad), pero no se tiene por qué conservar la energía cinética. Quizá se puede pensar que el agua que va cayendo almacena energía potencial, pero la situación física no depende de la sección del recipiente y por lo tanto tampoco de la altura a la que está el agua; se podría pensar en que las gotas de agua están en el suelo y se "recogen" sin que ganen energía potencial.

La "incorporación" de la masa de las gotas a la masa del recipiente supone un choque, y se puede visualizar fácilmente que es inelástico si la gotas se incorporan "chocando frontalmente con el

recipiente según avanza". Si las gotas chocan con el recipiente desde arriba, lateralmente a su trayectoria, parece un poco más raro de entender que supongan una fuerza que lo frene. Como no hay rozamiento se puede asimilar el movimiento rectilíneo del recipiente sobre el plano al movimiento en el vacío; si las gotas chocando lateralmente no lo desvían, además de la fuerza de cada gota en el impacto/incorporación hay fuerza del suelo sobre el recipiente para que no se desvíe. Se ve que hay más fuerzas externas que están actuando cuando las gotas se incorporan.
El resumen de esta disgresión es que es equivalente a que los choques de las gotas de agua sean inelásticos y no se conserve la Ec, por lo que no se puede usar conservación de Ec.
Una referencia de Ángel Franco
Dinámica de la partícula y de los sistemas de partículas. La lluvia que cae en un vagón de ferrocarril
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/dinamica/lluvia/lluvia.html
"Tenemos una situación equivalente, cuando un cuerpo de masa m_0 que lleva una velocidad inicial v_0 choca inelásticamente con pequeño cuerpo de masa Δm en reposo.
Se cita Lapidus I. R. Problem: the rain in the plain falls mainly on the train. Am. J. Phys. 53 (7) July 1985, Enunciado pág 644, solución pág 697.