enrique@fiquipedia.es Revisado 4 marzo 2016

(Se incluye el enunciado original tomado de las oposiciones, aunque en el año 2014 no dejaron sacar el enunciado a los opositores. Enunciado muy similar a Fisica Universitaria 12ª. Edicion Sears, Zemansky Vol. 1, Problema 6.102. Libro
https://archive.org/details/FisicaUniversitaria12va.EdicionSearsZemanskyVol.1
Creative Commons license: CC0 1.0 Universal
https://archive.org/stream/FisicaUniversitaria12va.EdicionSearsZemanskyVol.1/SearsZemanskyFisicaUniversitaria12va.Ed.Vol.1#page/n233/mode/2up/search/6.102)
>En la fase local de la olimpiada de física de 2016 hay un problema similar asociado a propagación de errores

FÍSICA Y QUÍMICA

Han de resolverse los cuatro problemas, cada uno delos cuales se calificará de 0 a 10 puntos. En caso de tener varios apartados la calificación de cada uno de ellos será la que figure en el texto y de no figurar se entenderá el mismo valor para todos. La calificación del ejercicio será la correspondiente a la media de las puntuaciones obtenidas en cada uno de los problemas.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Por cada falta de ortografía se deducirá medio punto de la calificación del ejercicio, salvo en el caso de tildes en cuyo caso se reducirá 0,25. Cuando se repita la misma falta de ortografía, se contará como una sola.
En los problemas se valorará la adecuada estructuración y el rigor en el desarrollo de su resolución y la inclusión de pasos detallados así como la realización de diagramas, dibujos y esquemas. Se tendrá especial rigor en la identificación de los principios y leyes físicas involucradas, la corrección de los resultados numéricos, el uso correcto de unidades, así como con los errores en la formulación, nomenclatura y lenguaje químico.

3.- Un avión en vuelo está sujeto a una fuerza de rozamiento cuya magnitud puede expresarse así:

$$F=\alpha v^2+\beta/v^2$$

donde α y β son constantes características de cada avión y v la velocidad del avión respecto al aire. El primer término representa la resistencia parásita que aumenta con la velocidad y el segundo la resistencia inducida o de arrastre responsable de la sustentación del avión.
Para un pequeño avión de un solo motor en el que $\alpha = 0{,}28\ N\cdot s^2\cdot m^{-2}$ y $\beta = 3{,}1\cdot 10^5\ N\cdot m^2\cdot s^{-2}$, calcule para una cantidad dada de combustible y considerando velocidad de crucero constante:
a) (5 puntos) La rapidez en km/h a la que este avión consigue el alcance máximo.
b) (5 puntos) La rapidez en km/h con la que el avión permanecerá el mayor tiempo en vuelo.

Como enunciado indica velocidad constante, se tiene que la aceleración es cero; asumimos la situación ideal de que es constante en todo momento: el avión no acelera ni frena, arranca directamente con esa velocidad y se detiene bruscamente cuando se le agota el combustible.
Podemos plantear utilizando la segunda ley de Newton

$$F_{motor}-F_{rozamiento}=0\Rightarrow F_{motor}=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}$$

Al ser velocidad es constante en todo momento, es un MRU, y podemos relacionar alcance y tiempo de vuelo x=v·t, pero no se puede pensar que el apartado b no tendría sentido ya que alcance máximo de apartado a implicaría tiempo de vuelo máximo en apartado b; en cada apartado son velocidades a priori distintas que dependerán de cómo se ha gastado en cada caso “una cantidad dada de combustible”
Para resolver los dos problemas, el objetivo a conseguir expresar la variable para la que se pide el máximo (distancia recorrida en apartado a y tiempo de permanencia en el aire) en función de la velocidad (sería expresar $x_{total\ recorrida}=f(v)$ y $t_{total\ vuelo}=f(v)$) quedando en función de la cantidad de combustible de partida, luego derivar respecto a v, y buscar el máximo. También es posible expresar una función f(x,t,v) y luego derivar respecto a v.
Una idea básica es cómo interviene “una cantidad dada de combustible”, para la que no se indica a qué ritmo se gasta. Una cantidad de combustible (c) tiene asociada una cantidad fija de energía ($E_{combustible}$) (podríamos pensar en que es una cantidad fija en kg ó L y tiene una entalpía dada en en kJ/mol), que supone realizar una cantidad de trabajo de propulsión $c\propto E_{combustible}$ (podríamos usar una constante k para indicar la relación de proporcionalidad e indicar $k\cdot c=E_{combustible}$).
El trabajo realizado por el combustible será de manera general $E_{combustible}=W_{motor}=\int_0^{x_{máx}} F_{motor}\,dx$ ya que a priori podríamos no asumir que la fuerza del motor es constante.

La fuerza del motor debe igualar la fuerza de rozamiento siempre para que la aceleración sea cero y la velocidad sea constante, lo que implica que la fuerza del motor es constante, al ser la fuerza de rozamiento independiente de la masa y solamente depender de la velocidad.
Eso no implica que el combustible se gaste a un ritmo constante si la masa del avión varía; cualitativamente se puede ver que a medida que se gaste combustible la masa total (avión más combustible) será menor y se gastará el combustible a menor ritmo en la propulsión. Pero el hecho de que la masa del avión varíe o no no afecta al hecho de que la fuerza de motor sea constante (para la expresión de fuerza de rozamiento dada y asumiendo velocidad constante); solamente afectaría al ritmo al que se gasta el combustible, cosa que no se pide.
a) Prescindiendo según lo comentado de consideraciones sobre si la masa del avión es constante o varía según se va consumiendo combustible, realizamos el planteamiento sabiendo la fuerza que ejerce el motor es constante durante todo el vuelo, por lo que podemos expresar

$$E_{combustible}=W_{motor}=F_{motor}\cdot x_{máx}$$

Sustituyendo, tenemos

$$\frac{E_{combustible}}{x_{máx}}=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\Rightarrow x_{máx}=\frac{k\cdot c}{\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}}$$

$$\frac{d x_{máx}}{dv}=0=k\cdot c\cdot(-1)\left(\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\right)^{-2}\left(2\alpha v-2\frac{\beta}{v^3}\right)$$

Para que el producto sea cero, uno de los dos términos o ambos deben ser cero, pero el primero no puede serlo. Igualamos el segundo

$$0=2\alpha v-2\frac{\beta}{v^3}\Rightarrow v^4=\frac{\beta}{\alpha}\Rightarrow v=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{3{,}1\cdot 10^5}{0{,}28}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 32{,}4\,m/s\approx 117\,km/h$$

Usamos dos cifras significativas en el resultado, como en el enunciado.
b) El planteamiento es similar, solamente que ahora, al ser MRU, x=v·t, luego planteamos

$$\frac{E_{combustible}}{v\cdot t_{máx}}=\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\Rightarrow t_{máx}=\frac{k\cdot c}{v\left(\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\right)}$$

$$\frac{d t_{máx}}{dv}=0=k\cdot c\cdot(-1)\left(v\left(\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}\right)\right)^{-2}\left(\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}+v\left(2\alpha v-2\frac{\beta}{v^3}\right)\right)$$

Para que el producto sea cero, uno de los dos términos o ambos deben ser cero, pero el primero no puede serlo. Igualamos el segundo

$$\alpha v^2+\frac{\beta}{v^2}=-2\alpha v^2+2\frac{\beta}{v^2}\Rightarrow 3\alpha v^2=\frac{\beta}{v^2}\Rightarrow v^4=\frac{\beta}{3\alpha}\Rightarrow v=\left(\frac{\beta}{3\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{3{,}1\cdot 10^5}{3\cdot 0{,}28}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 24{,}6\,m/s\approx 89\,km/h$$

Validaciones:
No hemos comprobado explícitamente si son máximos o mínimos; siendo estrictos habría que hacer la segunda derivada y comprobar si es mayor o menor que cero.
A nivel dimensional con los datos dados, se puede ver que para obtener una velocidad debe haber una relación con la raíz cuarta del cociente entre beta y alfa.