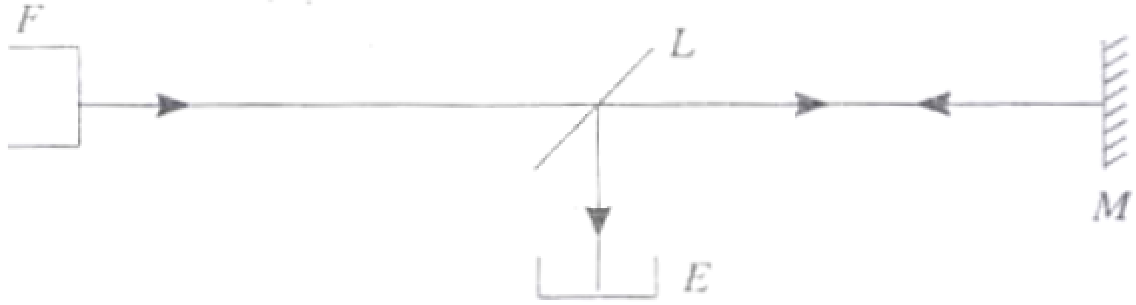
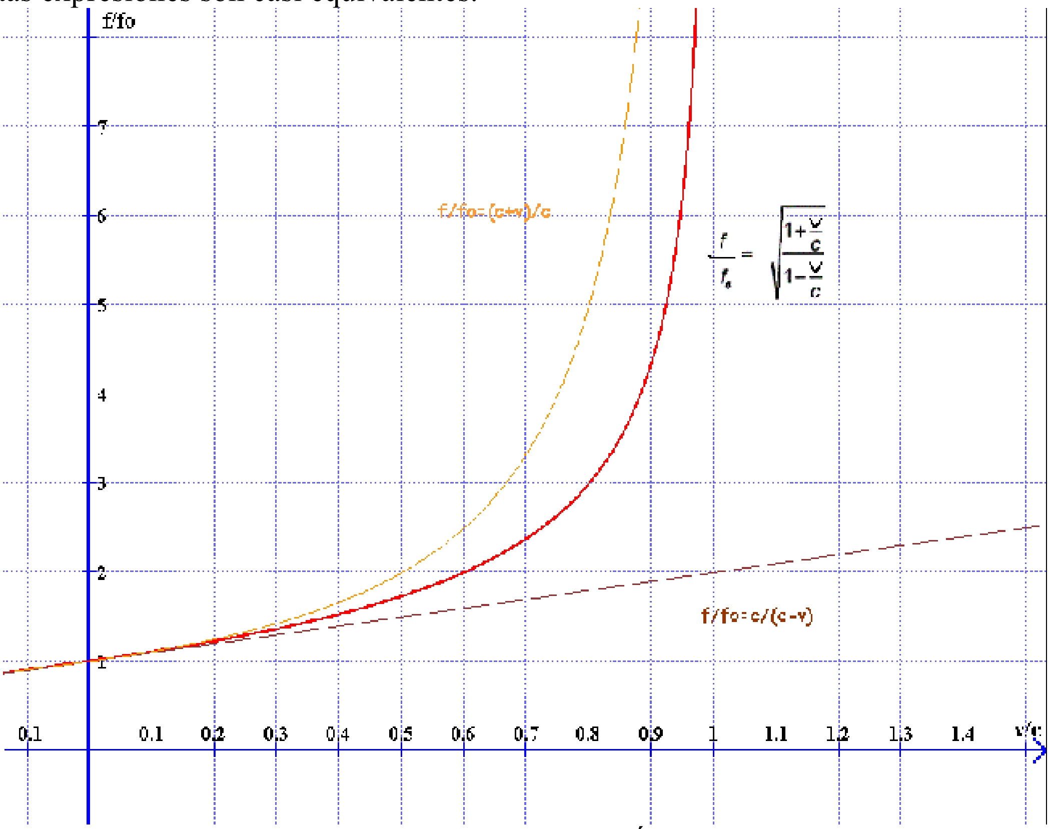
3. Consideremos el esquema representado en la figura. En él una fuente láser F emite un haz (que supondremos, por sencillez, plano) de frecuencia angular ω_0, el cual se refleja en el espejo plano M y es recogido finalmente por un espectroscopio E. Hallar la frecuencia ω medida por E en los tres casos siguientes:
a) El espejo M se aleja con velocidad v de la fuente en la dirección de propagación del haz (E y F se mantienen fijos)
b) La fuente láser se aleja con velocidad v de M en la dirección de propagación del haz (E y M se mantienen fijos).
c) El espectroscopio E se aleja con velocidad v de la lámina semirreflectante L en la dirección de propagación del haz (F y M se mantienen fijos)

Considerar las dos soluciones: v<<c y v relativista.



Asumimos que el medio es el vacío, que no se indica explícitamente (salvo al mencionar c sin más)
Teoría / disgresiones varias / aclaraciones (esto no es necesario en examen, no es la solución)
Parte de estas disgresiones están incluídas en los apuntes de teoría de física de 2º de Bachillerato de www.fiquipedia.es
Lo primero a tener en cuenta es que se trata de la luz, que tiene una velocidad de propagación constante en el vacío c, independientemente del sistema de referencia desde el que se mida, de acuerdo la Teoría de la Relatividad; da igual que se mueva foco, espejo o receptor.
Como se indica que contemplemos dos soluciones, debemos contemplar dos casos que son distintos, en cada uno de ellos hay expresiones diferentes para efecto Doppler:
1. No relativista (v<<c). Doppler "clásico" en variante asociado a Luz con v << c, siendo v la velocidad relativa entre foco y observador.
Caso movimiento objetos "clásico/no relativista":
$f'=\frac{v\pm v_o}{v\pm v_f}f$ v onda, $v_o=v_{observador}$, $v_f=v_{foco}$, f' es la percibida por observador, f emitida.
Acercamiento: f' ↑ (signo + en numerador si se acerca observador y - en denominador si es el foco)
Alejamiento: f' ↓ (signo - en numerador si se aleja observador y + en denominador si es el foco)
Caso luz "clásico/no relativista":
Son expresiones resultado de aproximación $\gamma=1$. Hay dos expresiones distintas!
-Referencia en foco, observador móvil (enlaza con expresión clásica):
$f'=\frac{c\pm v}{c}f$ General, $v=v_o-v_f$, velocidad relativa, + es acercamiento.
Alejamiento relativo: f'↓ (desplazamiento hacia el rojo) (signo -)
Acercamiento relativo: f'↑ (signo +)
-Referencia en observador, foco móvil (enlaza con expresión clásica)
$f'=\frac{c}{c\mp v}f$ General, $v=v_f-v_o$, velocidad relativa, + es alejamiento.
Alejamiento relativo: f'↓ (desplazamiento hacia el rojo) (signo + en expresión)

Acercamiento relativo: f'↑ (signo – en expresión)
Dos expresiones por ser aproximación: a v<<c ambas expresiones coinciden aunque no lo parezca!
Se puede ver gráfica y cómo para velocidades no relativistas v<<c con valores inferiores al 14%, la las distintas expresiones son casi equivalentes.



http://www.relatividad.org/bhole/doppler.htm © Ángel Torregrosa

2. Relativista (v comparable a c, se suelen considerar velocidades superiores a un 14% de c que hacen que el factor de Lorentz γ difiera un 1% de la unidad). Doppler "relativista", v vuelve a ser velocidad relativa entre foco y **receptor**; el término observador en relatividad se reserva para sistema de referencia.
- Si asumimos sistema de referencia en foco, "foco en reposo", v es velocidad del receptor luz ("observador en fórmula Doppler clásica", que está en numerador de expresión clásica, y la velocidad del foco que va en denominador es 0), y además habrá dilatación temporal Δt'(en movimiento, receptor onda) = γΔt (en reposo, foco), para el receptor de la onda el "tic de reloj" dura más, por lo que recibe mayor cantidad de oscilaciones de la onda/fotones por segundo propio del receptor y la frecuencia recibida aumenta "f'=γf".
En este caso existen varias expresiones equivalentes para el término que relaciona f' y f:

$$f'=\gamma\frac{c\pm v}{c}f=\gamma(1\pm\beta)f=\frac{(1\pm\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot f=\frac{\sqrt{1\pm\beta}}{\sqrt{1\mp\beta}}f$$

Alejamiento relativo: f'↓ (– en numerador)
Acercamiento relativo: f'↑ (+ en numerador)

- Si asumimos sistema de referencia en receptor, "receptor en reposo", v es velocidad del foco de luz ("foco en fórmula Doppler clásica", que está en denominador de expresión clásica, y la velocidad del observador que va en numerador es 0), y además habrá dilatación temporal Δt'(en movimiento, foco) = γΔt(en reposo, receptor onda), para el receptor el "tic de reloj" dura menos, por lo que recibe menor cantidad de oscilaciones de la onda /fotones por segundo propio del receptor y la frecuencia recibida disminuye "f'=f/γ"

$$f'=\frac{1}{\gamma}\frac{c}{c\pm v}f=\frac{1}{\gamma}\frac{1}{(1\pm\beta)}f=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1\pm\beta}f=\frac{\sqrt{1\pm\beta}}{\sqrt{1\mp\beta}}f$$

enrique@fiquipedia.es

$f'=\frac{\sqrt{1\pm\beta}}{\sqrt{1\mp\beta}}f$ La expresión final es única: ambas son y deben ser equivalentes por el principio de relatividad : desde todos los sistemas de referencia inerciales el resultado es el mismo, la elección de sistema de referencia inercial no afecta al resultado.

Es importante tener presente que aunque el Doppler en general es oblicuo, solamente contemplamos Doppler longitudinal (en la dirección de propagación) que es el de las expresiones mostradas. Existe Doppler relativista transverso "relacionado con ángulos de 90º", pero no aplica a este caso ya que se habla siempre de "dirección de propagación del haz"

¿Cómo aproximar?

Se puede pensar en ver la situación no relativista (v<<c) como una aproximación de la relativista para velocidades no relativistas, y puede surgir la duda de que en general, v << c implica $\beta\approx 0$ y $\gamma\approx 1$ con lo que tendríamos que $\gamma(1-\beta)\approx 1$ y tendríamos que no hay variación de frecuencia. Aunque pueda intentar asociarse a la experiencia esa no variación (¿hay variación en el color de la luz recibida desde un coche en movimiento como ocurre con la frecuencia del sonido recibido?), es erróneo, ya que sí sabemos que hay Doppler por ejemplo en un radar de medición de velocidad donde hay variación de frecuencia aunque v << c.

Aunque se escriba la expresión escrita como $f'=\gamma(1\pm\beta)f$ hay que pensar en β no como un parámetro "relativista" sino como v/c donde c es un caso concreto de velocidad de una onda concreta, mientras que γ sí viene de la dilatación de tiempo relativista. Si se aproxima $\gamma\approx 1$ (sin dilatación temporal) pero manteniendo sin aproximar β como v/c en esa expresión, se llegaría a la expresión no relativista. El hecho de que "γ incluya dentro β=v/c" es lo que permite obtener expresiones simplificadas para el caso de Doppler relativista longitudinal.

Es "habitual" realizar una aproximación por Taylor tomando unos pocos términos

(se puden los primeros términos de series de Taylor concretas usando por ejemplo http://www.wolframalpha.com/input/?i=taylor+series+at+x%3D0++1%2Fsqrt(1-x%5E2%2Fa%5E2), que por cierto me comentan en 2018 que en algunos libros indican el tercer término de ese desarrollo con un valor incorrecto)

Utilizamos f(x) para indicar función genérica que no hay que confundir con f de frecuencia.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ Que se suele realizar para a=0.

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \rightarrow f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+...$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \rightarrow f'=\gamma\frac{c-v}{c}f=\frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}=f\left(1-\frac{v}{c}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v^3}{c^3}+...\right)$$

Enunciado indica frecuencia angular $\omega_0=2\pi f_0$, por lo que como se pide expresión ω podemos usar las expresiones anteriores, cambiando f' por ω y f por ω_0

Resolución

a) **Se aleja espejo M.** Existe Doppler en recepción por espejo M, que al estar alejándose recibe frecuencia menor, y existe Doppler en emisión por espejo M, que vuelve a ser un foco que se aleja. El efecto global es es como si la velocidad de alejamiento del foco fuera el doble, lo que se puede razonar (obviando el papel de L que está en reposo respecto a foco F y receptor E y que no interviene, y obviando dilatación temporal) pensando que receptor en E ve la luz procedente de la imagen de F en M que es F', y que F' se aleja a velocidad aparente 2v, ya que por cada distancia d que se aleja M, F' se aleja 2d.

Consideramos fuente móvil, observador fijo:

-No relativista: $\omega=\frac{c}{c+2v}\omega_0$

El desarrollo asociado de serie de Taylor ... $\omega=\omega_0(1-2\frac{v}{c}+4\frac{v^2}{c^2}-8\frac{v^3}{c^3}+...)$

-Relativista: $\omega=\frac{1}{\gamma}\frac{c}{c+2v}\omega_0=\frac{\sqrt{1-2\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+2\frac{v}{c}}}\omega_0$

El desarrollo asociado de serie de Taylor $\omega=\omega_0(1-2\frac{v}{c}+2\frac{v^2}{c^2}-4\frac{v^3}{c^3}+...)$

Se puede comprobar aproximando por Taylor los dos primeros términos de la aproximación llevan a la expresión no relativista.
Se puede ver como se podría plantear como movimiento relativo, con "foco fijo" y velocidad observador v, y coincidiría con los dos primeros términos de las expresiones anteriores

$\omega=\frac{c-2v}{c}\omega_0=(1-2\frac{v}{c})\omega_0$

b) **Se aleja foco F.** Si F se aleja solamente existe efecto Doppler en recepción por alejamiento a velocidad v; espejo no influye porque F y F' se alejan a la misma velocidad.

-No relativista: $\omega=\frac{c}{c+v}\omega_0$

El desarrollo asociado de serie de Taylor ... $\omega=\omega_0(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{c^2}-\frac{v^3}{c^3}+...)$

-Relativista: $\omega=\frac{1}{\gamma}\frac{c}{c+v}\omega_0=\frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}\omega_0$

El desarrollo asociado de serie de Taylor $\omega=\omega_0(1-\frac{v}{c}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v^3}{c^3}+...)$

Se puede comprobar aproximando por Taylor los dos primeros términos de la aproximación llevan a la expresión no relativista.
Incluso se puede ver como se podría plantear como movimiento relativo, con "foco fijo" y velocidad observador v, y coincidiría con los dos primeros términos de las expresiones anteriores

$\omega=\frac{c-v}{c}\omega_0=(1-\frac{v}{c})\omega_0$

c) **Se aleja espectroscopio E.** El observador se aleja, hay alejamiento relativo y la frecuencia disminuirá.

-No relativista: $\omega=\frac{c-v}{c}\omega_0=(1-\frac{v}{c})\omega_0$

No es necesario desarrollo en serie de Taylor.
En situación no relativista no es igual a situación b)

-Relativista: $\omega=\gamma\frac{c-v}{c}\omega_0=\frac{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}\omega_0$

$\omega=\omega_0(1-\frac{v}{c}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}\frac{v^3}{c^3}+...)$

Idéntico caso b relativista.
Se puede comprobar aproximando por Taylor los dos primeros términos de la aproximación llevan a la expresión no relativista.