enrique@fiquipedia.es Revisado 16 mayo 2016

2. Un solenoide largo y estrecho, de sección S, longitud l y N espiras tiene una autoinducción L y una resistencia R. Si está colocado en una región donde existe un campo magnético de intensidad $B=B_0\cos\omega t$ en la dirección del eje del solenoide y la frecuencia ω es lo suficientemente baja para considerar que las corrientes son lentamente variables, calcúlese:
a) La corriente inducida en el solenoide, así como el flujo total que lo atraviesa.
b) Lo mismo en el caso en que la resistencia R del solenoide sea despreciable frente a Lω.

a) El flujo asociado al campo externo que atraviesa el solenoide es
$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot S\cdot\cos\alpha=B\cdot S=NSB_0\cos\omega t$$
La fuerza electromotriz inducida $\varepsilon=\frac{-d\Phi}{dt}=NS\,B_0\,\omega\,sen\,\omega\,t$

La intensidad de corriente asociada a esa fuerza electromotriz es $I_{inducida}=\frac{\varepsilon}{Z}$

Siendo $Z=R+j\,L\omega;|Z|=\sqrt{R^2+(L\omega)^2};tg\,\phi(Z)=\frac{L\omega}{R}$

Sustituyendo, y teniendo en cuenta que una impedancia de fase positiva retrasa la corriente respecto la tensión por lo que introduce un desfase negativo en la expresión trigonométrica de la corriente respecto a la fase de la expresión trigonométrica de la tensión que tenía fase inicial nula.
$$I_{inducida}=\frac{NS\,B_0\,\omega}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}sen(\omega t-arctg(\frac{L\omega}{R}))$$
Esta corriente inducida crea un campo magnético en el interior del solenoide, que también contribuye al flujo total
$$\Phi_{I\,inducida}=B_{inducido}\cdot NS=NS\frac{\mu_0 N\,I_{inducida}}{l}=NS\frac{\mu_0 N\,NS\,B_0\omega}{l\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}sen(\omega t-arctg(\frac{L\omega}{R}))$$
$$\Phi_{I\,inducida}=\frac{N^3S^2\mu_0B_0\omega}{l\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}sen(\omega t-arctg(\frac{L\omega}{R}))$$
El flujo total
$$\Phi_{total}=\Phi+\Phi_{I\,inducida}=N\cdot S\cdot B_0\cos\omega t+\frac{N^3S^2\mu_0B_0\omega}{l\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}sen(\omega t-arctg(\frac{L\omega}{R}))$$
b) Si R << Lω
Cualitativamente la aproximación es equivalente a considerar una bobina ideal, en la que su desfase es π/2 y su impedancia jLω

Cuantitativamente:
$$R^2+(L\omega)^2\approx(L\omega)^2\Rightarrow|Z|=\sqrt{R^2+(L\omega)^2}\approx\sqrt{(L\omega)^2}=L\omega$$
$$\frac{L\omega}{R}\approx\infty\Rightarrow arctg(\frac{L\omega}{R})=\frac{\pi}{2}$$
Sustituyendo
$$I_{inducida}=\frac{NS\,B_0\,\omega}{L\omega}sen(\omega t-\frac{\pi}{2})=\frac{-NS\,B_0}{L}\cos\omega t$$
$$\Phi_{total}=NSB_0\cos\omega t-\frac{N^3S^2\mu_0B_0}{l\,L}\cos\omega t=(NSB_0-\frac{N^3S^2\mu_0B_0}{l\,L})\cos\omega t$$
Para simplificar estas expresiones de apartado b) (en el apartado a las expresiones con R no se pueden simplificar) debemos calcular el valor de L para un solenoide

Sabemos que el campo magnético creado en el interior del solenoide es $B=\frac{\mu_0 N\,I}{l}$ y el flujo

enrique@fiquipedia.es

$\Phi=N\cdot S\cdot B=\frac{\mu_0 N^2 S I}{l}$ y como $L=\frac{\Phi}{I}$, tenemos que para el solenoide $L=\frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

Sustituyendo en ambas

$$I_{inducida}=\frac{-NS\,B_0\cdot l}{\mu_0 N^2 S}\cos\omega t=\frac{-B_0\cdot l}{\mu_0 N}\cos\omega t$$

$$\Phi_{total}=(NSB_0-\frac{N^3 S^2 \mu_0 B_0\cdot l}{l\,\mu_0 N^2 S})\cos\omega t=(NSB_0-N\,S\,B_0)\cos\omega t=0$$