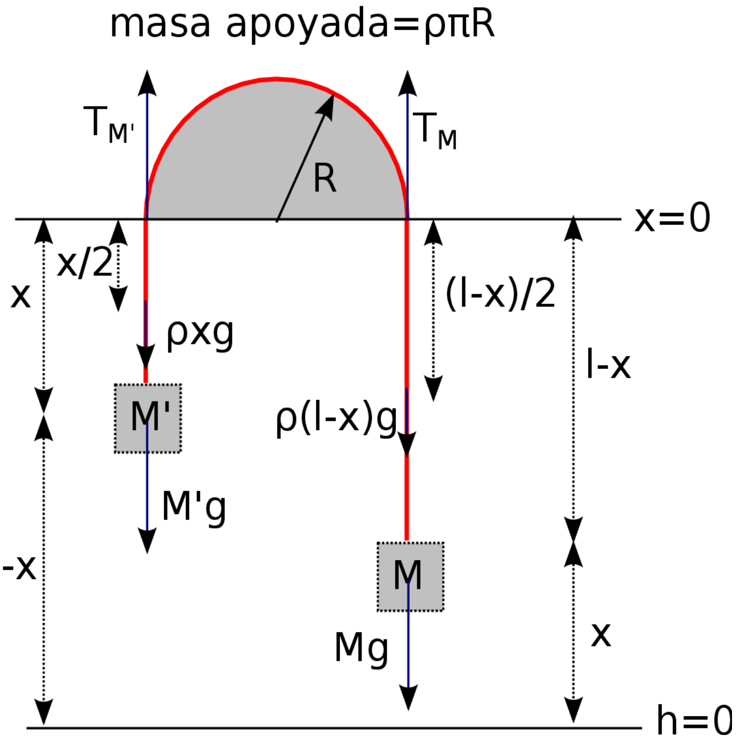
enrique@fiquipedia.es Revisado 16 mayo 2016

1. Sobre la garganta de una polea de radio R se coloca un hilo flexible de longitud l+πR de densidad ρ. En los extremos del hilo cuelgan dos masas M y M'. La mayor de ellas M', se encuentra, al principio, en su posición más alta (x=0, medida desde el diámetro horizontal de la polea) y desciende hasta su posición más baja (x=l), a la que llega con una velocidad v. Calcular, en función de la posición de la masa M':
a) La aceleración suponiendo que la polea no tiene masa ni existe rozamiento en ella.
b) La velocidad y las tensiones del hilo en los puntos extremos A y B del diámetro horizontal de la polea. ¿Cuál es el valor de la velocidad v con que la masa M' llega a su posición más baja?

a) Calcular la aceleración en este caso se puede hacer con dos planteamientos:
Planteamiento dinámico: La polea no tiene masa, no tiene momento de inercia y no podemos relacionar aceleración angular de polea con aceleración lineal; puede que la polea gire y el hilo con ella ó que la polea esté inmóvil y el hilo deslice sobre la polea sin rozamiento, pero eso no aporta información a resolver el movimiento de las masas y el hilo. De hecho, es más práctico visualizarlo como que es media polea que no gira, y lo único que aporta al problema es curvatura al trozo de el hilo apoyado sobre esa media polea.
Sin embargo sí que hay que tener en cuenta que el hilo sí tiene masa, y sobre todo, que el tramo de hilo curvo y apoyado también tiene masa.
Se indica densidad ρ, pero asumimos que es densidad lineal.
No se indica explícitamente, pero asumimos grosor despreciable e indeformable – inextensible.
Tomamos en diagrama criterio de signos para M' y M, sabiendo que al ser el hilo indeformable $a_{M'}=a_M=a$
Como ρ=masa/longitud, masa de un trozo de hilo longitud x será $\rho \cdot x$

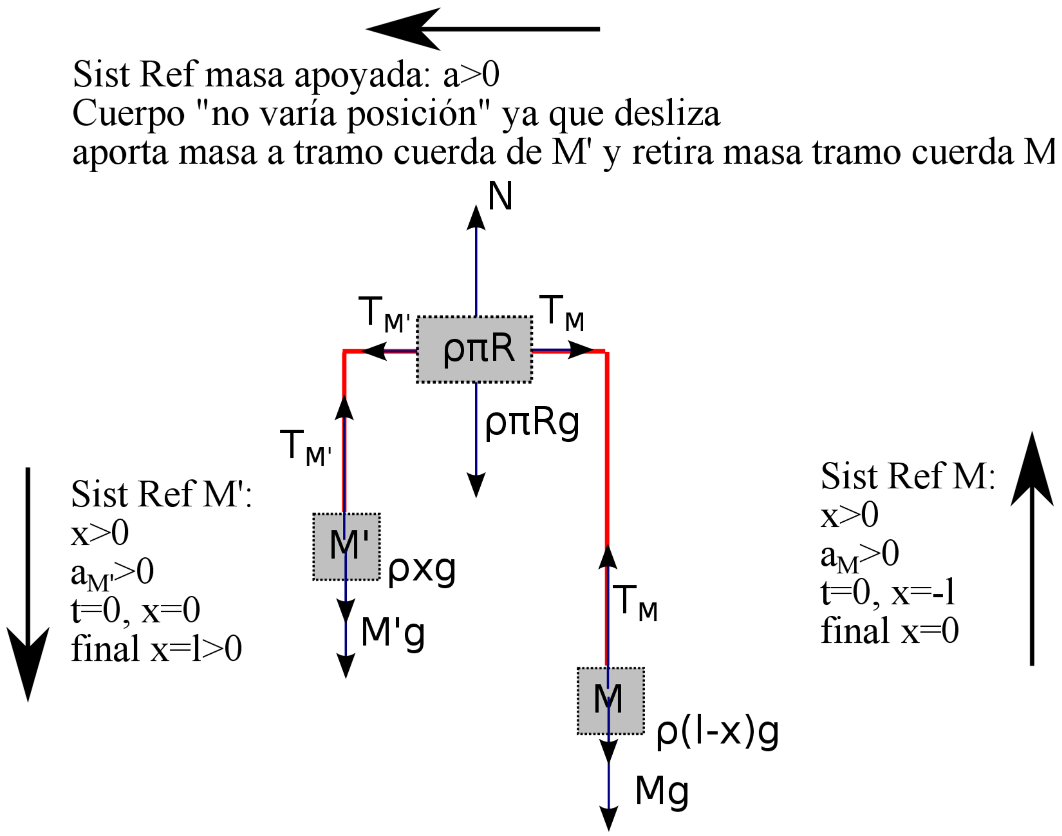
M'>M: gira en sentido contrario a agujas del reloj



El trozo de hilo de longitud πR apoyado sobre la polea:
-Sí contribuye a la masa total que hay que acelerar (si la R fuera infinito, habría que acelerar un trozo de hilo muy pesado y las masas no se moverían!).
No se puede "despreciar" totalmente la polea como si R fuese cero!
- No contribuye a que acelere más deprisa ya que está apoyado de manera simétrica y las partes que tiran hacia abajo se compensan con las partes que tiran hacia arriba. Si fuera una figura no simétrica, como un triángulo escaleno, sí habría que tenerlo en cuenta. En este caso se puede pensar que es equivalente a una cadena que está apoyada no sobre una polea sino sobre un trozo de mesa sin rozamiento de longitud πR; aporta masa que hay que acelerar.
Los trozos de hilo a cada lado verticales si tienen pesos que contribuyen a la aceleración.

enrique@fiquipedia.es Revisado 16 mayo 2016

Cuerda indeformable:
$a = a_{M'} = a_M$(según criterio signos diagrama)
Tensión igual en extremos cuerda, pero no $T_{M'} = T_M$



Aplicamos 2ª ley de Newton a cada uno de los tres cuerpos, (consideramos hilo y tramo de hilo vertical hasta polea el mismo cuerpo)

*Para M' y su tramo de hilo vertical (1ª, la más elevada, eje x vertical, dirigido hacia abajo ya que es la masa mayor)

$$M'g + \rho x g - T_{M'} = (M' + \rho x) a$$

*Para M y su tramo de hilo vertical (2ª, la más baja, eje x vertical, dirigido hacia arriba ya que la masa es la menor):

$$T_M - Mg - \rho(l-x)g = (\rho(l-x) + M) a$$

*Para el tramo apoyado

$$T_{M'} - T_M = (\rho \pi R) a$$

Sumando las dos primeras expresiones y restando la tercera:

$$M'g + \rho x g - Mg - \rho(l-x) g = (M' + \rho l + M - \rho \pi R) a$$

$$a = g \frac{(M' + \rho x - M + \rho(l-x))}{M' + M + \rho(l + \pi R)}$$

$$a = g \frac{(M' + \rho x - M - \rho l + \rho x)}{M' + M + \rho(l + \pi R)}$$

$$a = g \frac{(M' - M + \rho(2x - l))}{M' + M + \rho(l + \pi R)}$$

Validaciones lógicas/físicas del resultado:

-Dependencias:

– a depende x; si x=0 y l=0, a>0 al ser M'>M

– a depende de R: si R=0 y l=0, a sería > 0 solamente debida a diferencia de masas

enrique@fiquipedia.es

-Situaciones límite:
– Si masas iguales y colgando a misma distancia polea, no se mueven: M'=M y x=l/2 → a=0
– Si R=∞, a=0, ya que M' tendría que mover una masa apoyada infinita.
- Si ρ=0, la expresión se simplifica con la expresión “habitual” g(M'-M)/(M'+M)
-Cualitativamente “suma de todas las fuerzas en el sentido del movimiento”, dividido entre “suma de todas las masas que hay que mover” (el tramo de hilo de longitud πR hay que moverlo y aparece en denominador, aunque su peso no es una fuerza que contribuya al movimiento y por eso no aparece en numerador)
Planteamiento energético: viendo que en apartado b) se pide velocidad, se puede calcular primero la velocidad del apartado b) energéticamente y luego calcular la aceleración como la derivada.
b) Las tensiones en ambos extremos no son iguales, o no se movería el tramo de hilo apoyado.
Se despejan de las expresiones dinámicas anteriores (calcular tensiones implica obligatoriamente planteamiento dinámico)
Sustituimos expresión de a directamente en 1ª

$$M'g+\rho xg-T_{M'}=(M'+\rho x)\cdot\left(\frac{g(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)$$

$$-T_{M'}=\frac{(-M'g-\rho xg)(M'+M+\rho(l+\pi R))+(M'+\rho x)\cdot g(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$-T_{M'}=g\frac{-(M'+\rho x)(M'+M+\rho(l+\pi R))+(M'+\rho x)(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$-T_{M'}=g(M'+\rho x)\frac{-M'-M-\rho l-\rho\pi R+M'-M+\rho(2x-l)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$-T_{M'}=2g(M'+\rho x)\frac{-M+\rho\left(x-l-\frac{\pi R}{2}\right)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$T_M'=2g(M'+\rho x)\frac{M+\rho\left(l-x+\frac{\pi R}{2}\right)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

Despejando de la tercera

$$T_M=T_{M'}-(\rho\pi R)a$$

$$T_M=2g(M'+\rho x)\frac{M+\rho\left(l-x+\frac{\pi R}{2}\right)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}-(\rho\pi R)\left(\frac{g(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)$$

$$T_M=\frac{2g(M'+\rho x)\left(M+\rho\left(l-x+\frac{\pi R}{2}\right)\right)-\rho\pi R g(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$T_M=g\frac{2(M'+\rho x)\left(M+\rho l-\rho x+\frac{\rho\pi R}{2}\right)-\rho\pi R(M'-M-\rho l+2\rho x)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$T_M=g\frac{2(M'+\rho x)(M+\rho(l-x))+2(M'+\rho x)\left(\frac{\rho\pi R}{2}\right)-\rho\pi R(-M-\rho(l-x))-\rho\pi R(M'+\rho x)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$T_M=g\frac{(M+\rho(l-x))(2(M'+\rho x)+\rho\pi R)+\cancel{(M'+\rho x)(\rho\pi R)-\rho\pi R(M'+\rho x)}}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

$$T_M=g(2(M'+\rho x)+\rho\pi R)\frac{(M+\rho(l-x))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

Para la velocidad se pueden realizar varios planteamientos:
- **Planteamiento dinámico (el lógico si en apartado a se utilizó el planteamiento dinámico)**: a=dv/dt, luego hallar v integrando a respecto de t. A priori parece no viable, ya que para integrar necesitaríamos conocer variación de x respecto de t, y esa variación es precisamente v que es lo que nos piden.
Se trata de ver que sí tenemos la expresión de la aceleración; la relacionamos con v

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v\Rightarrow a\cdot dx=v\cdot dv\Rightarrow\left(\frac{g(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)dx=v\cdot dv$$

Integramos entre 0 y x

$$\int_0^x\left(g\frac{(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)dx=\int_0^x v\cdot dv$$

$$\frac{g(M'-M-\rho l)}{M'+M+\rho(l+\pi R)}x+\frac{g\rho}{M'+M+\rho(l+\pi R)}x^2=\frac{v^2}{2}$$

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{\rho x^2+(M'-M-\rho l)x}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)}$$

Validaciones lógicas/físicas del resultado:
– Si R=∞, v=0, ya que M' tendría que mover una masa apoyada infinita.
En la posición más baja, x=l, sustituyendo

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{\rho l^2+(M'-M-\rho l)l}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)}=\sqrt{2g\left(\frac{(M'-M)l}{M'+M+\rho(l+\pi R)}\right)}$$

- **Planteamiento energético (sería el primer paso para realizar luego el apartado a sin planteamiento dinámico)**. El trozo de hilo apoyando en la polea tiene momento de inercia, ya no es equivalente a que estuviera apoyado en una mesa. En razonamiento dinámico el radio R del enunciado se utiliza solamente para calcular la masa del trozo de hilo apoyado.
Al no haber rozamiento, utilizamos la conservación de la energía
Tomamos h=0 en x=l.
Situación A (Inicial, bloque M' en x=0, h=l, v es nula):
Ec=0 (Bloques e hilo)
Ep=Ep bloques+Ep hilo=Ep(M')+Ep(M)+Ep(hilo tramo recto)+Ep(hilo tramo curvo)
Ep(M')=M'gl
Ep(M)=0
Ep(hilo tramo recto)= ρlg(l/2), tomamos h en su centro de masa, a mitad.
Ep(hilo tramo curvo); no la calculamos porque se cancela, se calcula como una integral.
(Hacemos el cálculo aunque no es necesario) Ep= ρπR·g·h_{CM};

$$y_{cm}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$m=\rho s\Rightarrow dm=\rho\,ds$$

$$Usamos\ polares\Rightarrow s=R\theta\Rightarrow ds=R\,d\theta$$

$$y_{cm}=\frac{\int_0^\pi R\,sen\theta\,\rho R\,d\theta}{\int_0^\pi\rho R\,d\theta}$$

Ep=ρπR·g·2R/π=2ρgR^2

$$y_{cm}=\frac{\rho R^2[-\cos]_0^\pi}{\rho R\pi}=R\frac{(-(-1)-(-1))}{\pi}=\frac{2R}{\pi}\approx 0{,}64\,R$$

Situación B(Bloque M' se ha desplazado, en posición x, h=l-x, v no es nula):
Ec medio aro de hilo = ½ I ω^2; Para un aro I=MR^2, aunque sea medio toda la masa está a distancia R y se llega a la misma expresión I=MR^2 , siendo simplemente la masa la mitad del aro completo

Ec medio aro de hilo = ½ $(\rho\pi R\cdot R^2)v^2/R^2$ = ½ $\rho\pi R v^2$
Los tramos de hilo rectos también tienen masa y energía cinética: en total es una longitud l a velocidad v.

$$E_c=\frac{1}{2}M'v^2+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\rho l v^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(M'+M+\rho(l+\pi R))v^2$$

Ep=Ep bloques+Ep hilo=Ep(M')+Ep(M)+Ep(hilo tramos rectos)+Ep(hilo tramo curvo)
Ep(M')=M'g(l-x)
Ep(M)=Mgx
Ep(hilo tramos rectos)= ρ(l-x)g((x+(l-x)/2) + ρxg(l-x/2) ; tomamos h en su su centro de masa a mitad del tramo.
Ep(hilo tramo curvo) igual al caso anterior

Aplicando conservación:
Em(A)-Em(B)=0 ; la Ep (hilo tramo curvo) se anula

$$M'gl+\rho\frac{gl^2}{2}-M'g(l-x)-Mgx-\rho(l-x)g\left(\frac{2x+l-x}{2}\right)-\rho xg\left(\frac{2l-x}{2}\right)-\frac{1}{2}(M'+M+\rho(l+\pi R))v^2=0$$

$$M'gx-Mgx+\rho\frac{gl^2}{2}-\rho g\frac{(l^2-x^2)}{2}-\rho g\left(\frac{2lx-x^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(M'+M+\rho(l+\pi R))v^2$$

$$2gx(M'-M)+\rho g(x^2-2lx+x^2)=(M'+M+\rho\frac{\pi}{R})v^2$$

$$2gx(M'-M+\rho(x-l))=(M'+M+\frac{1}{2}\rho(l+\pi R))v^2$$

$$v=\sqrt{2g\frac{(\rho x^2+(M'-M-\rho l)x)}{(M'+M+\rho(l+\pi R))}}$$

Expresión idéntica a la obtenida dinámicamente
La aceleración se podría obtener derivando la velocidad.

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot v$$

$$a=\sqrt{\frac{2g}{(M'+M+\rho(l+\pi R))}}\frac{d}{dx}\sqrt{\rho x^2+(M'-M-\rho l)x}\cdot\sqrt{2g\frac{(\rho x^2+(M'-M-\rho l)x)}{(M'+M+\rho(l+\pi R))}}$$

$$a=2g\frac{\sqrt{(\rho x^2+(M'-M-\rho l)x)}}{(M'+M+\rho(l+\pi R))}\frac{1}{2}\frac{2\rho x+M'-M-\rho l}{\sqrt{\rho x^2+(M'-M-\rho l)x}}$$

$$a=g\frac{(M'-M+\rho(2x-l))}{M'+M+\rho(l+\pi R)}$$

Expresión idéntica a la obtenida dinámicamente.