4. Demuestre que en un proceso adiabático de un gas perfecto se cumple

$$H_2-H_1=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]$$

Siendo T_1 y P_1 las condiciones iniciales y T_2 y P_2 las finales.

En general en problemas de termodinámica debemos comenzar dejando claro el convenio de signos usado: se utiliza el convenio IUPAC según el cual la primera ley es ΔU=Q+W, Q>0 y W>0 son aportados al sistema (no se utiliza el convenio Clausius según el cual es ΔU=Q-W)

Por definición H=U+PV, y si el proceso es adiabático Q=0, luego ΔU=W
En un gas perfecto, PV=nRT, y en un proceso adiabático $PV^{\gamma}=cte$

$$H_2-H_1=U_2-U_1+(P_2V_2-P_1V_1)$$

Por definición de trabajo

$$U_2-U_1=-\int_{V_1}^{V_2}P\,dV$$

$$U_2-U_1=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{cte}{V_2^{\gamma-1}}-\frac{cte}{V_1^{\gamma-1}}\right)$$

$$U_2-U_1=\frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{P_2\cdot V_2^{\gamma}}{V_2^{\gamma-1}}-\frac{P_1\cdot V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}}\right)$$

$$U_2-U_1=\frac{1}{\gamma-1}(P_2\cdot V_2-P_1\cdot V_1)$$

Sustituyendo

$$H_2-H_1=\frac{1}{\gamma-1}(P_2\cdot V_2-P_1\cdot V_1)+(P_2V_2-P_1V_1)=\frac{\gamma}{\gamma-1}(P_2\cdot V_2-P_1\cdot V_1)$$

Buscando la expresión del enunciado donde aparece P_2/P_1 podemos plantear

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}}\Rightarrow\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\frac{V_1}{V_2}$$

Y operando con el término de la expresión anterior

$$P_2\cdot V_2-P_1\cdot V_1=P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}V_2-P_1V_1=P_1V_1\left(\frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}-1\right)=P_1V_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]$$

En un gas ideal para cada mol se cumple PV=RT, luego sustituyendo $P_1V_1=RT_1$ llegamos a

$$H_2-H_1=\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_1\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1\right]$$