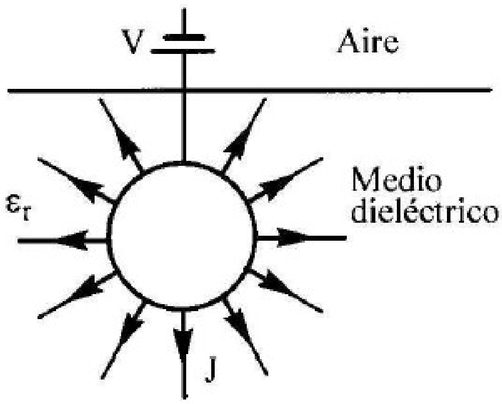
2. Una esfera conductora de radio R, sumergida en un medio dieléctrico imperfecto de conductividad σ y permitividad ε_r, está conectada a una batería que suministra un potencial V. Calcúlese el trabajo por unidad de tiempo realizado por la batería para mantener el potencial de la esfera V.



Referencias
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Esfera_conductora_sumergida_en_diel%C3%A9ctrico
http://forum.lawebdefisica.com/threads/34464-problema-de-diel%C3%A9ctrico-imperfecto
http://pauli.fis.puc.cl/~rramirez/E_M/Html/Ejercicios_Resueltos_Garrido_Narrias_Parte2.pdf#page=41 Problema 63

Una esfera cargada con cierto potencial tiene cierta capacidad e implica que tiene cierta carga; al ser el medio dieléctrico imperfecto y tener conductividad irá perdiendo carga a cierto ritmo, y la batería debe suministrar esa carga, realizando trabajo por unidad de tiempo, que es la potencia.
La capacidad de la esfera la podemos calcular o plantear directamente

$C=\frac{Q}{V}$ En una esfera cargada con una carga Q, el campo es radial, y utilizando la definición de potencial, siendo R el radio de la esfera y tomando referencia en infinito.

Enunciado indica "permitividad ε_r", y por el subíndice asumimos que está hablando de permitividad relativa, porque lo habitual es usar "permitividad ε (producto de la permitividad relativa y la permitividad del vacío $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$)".

$$V=\int_R^\infty \vec{E}\,\vec{dl}=\int_R^\infty K\frac{Q}{r^2}dr=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

Para una esfera $C=\frac{\cancel{Q}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{\cancel{Q}}{R}}=4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 R$

La potencia a suministrar es $P=\frac{V^2}{Resist}=Resist\,I^2=V\,I$ (usamos Resist en lugar de R para evitar confusión). Bastaría con calcular resistencia o intensidad, planteamos ambos que están relacionados
La resistencia ofrece el dieléctrico con esa forma y conductividad, por definición de resistencia

$Resist=\rho\frac{L}{S}$ siendo la conductividad la inversa de la resistividad $\sigma=\frac{1}{\rho}$

En la figura original del enunciado aparece la letra j, densidad de corriente, que en cierto modo nos orienta. Según la ley de Ohm Resist=V/I, por lo que tenemos que calcular la I, y por definición.

$I=\int_S \vec{j}\,\vec{dS}=\int_S \sigma\vec{E}\,\vec{dS}$ Al ser campo radial siempre es paralelo al vector superficie y tiene un valor constante en la superficie de la esfera

$$I=\sigma\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int_S dS=\frac{\sigma Q\cancel{4\pi R^2}}{\cancel{4\pi R^2}\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{\sigma Q}{4\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

Validación física: a mayor conductividad y carga mayor corriente. A mayor permitividad eléctrica menor corriente.

Según la ley de Ohm $Resist=\frac{V}{I}=\frac{\frac{1}{4\pi\cancel{\varepsilon_r\varepsilon_0}}\frac{\cancel{Q}}{R}}{\frac{\sigma\cancel{Q}}{\cancel{\varepsilon_r\varepsilon_0}}}=\frac{1}{4\pi\sigma R}$

Validación física: a mayor conductividad y mayor radio menor resistencia.

$P=\frac{V^2}{Resist}=Resist\, I^2=V\, I=\frac{1}{4\pi\sigma R}\cdot\left(\frac{\sigma Q}{4\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)^2=\frac{\sigma Q^2}{(4\varepsilon_r\varepsilon_0)^2\pi R}$

Validación física: a mayor conductividad y carga la batería deberá aportar más potencia, porque se perderá más carga por unidad de tiempo.