1. La densidad de un planeta de radio R responde a la expresión ρ=Cr, donde 0 ≤ r ≤ R, y y C es una constante.
Determinar en función de C y R:
a) La masa del planeta.
b) La expresión de la intensidad del campo gravitatorio generado por el planeta, en:
b.1. Un punto exterior.
b.2. Un punto interior.
En ambos casos, justifique la solución obtenida.
c) Considere ahora un satélite de masa m que describe una órbita circular ecuatorial a una altura 3R sobre el planeta. Determine, en función de C y R:
c.1. El momento angular del satélite respecto al centro del planeta.
c.2 La variación de energía que experimenta el satélite cuando pasa a una órbita de altura R.

a) $\rho=\frac{m}{V}\Rightarrow m=\rho\cdot V$ Para la esfera $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Ojo: la densidad no es uniforme por lo que ρ=dm/dV, no podemos usar m=ρV, sino dm=ρdV
Plantear primero m=ρV y luego hacer el diferencial de dm como d(ρV) conjuntamente es erróneo.

$$dV=4\pi r^2 dr$$
$$dm=Cr\cdot 4\pi r^2 dr=4C\pi r^3 dr$$
$$M_{planeta}=\int_{Vplaneta} dm=4\int_0^R C\pi r^3 dr=4C\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R=C\pi R^4$$

b) Utilizando la ley de Gauss para el campo gravitatorio $\oint \vec{g}\,\vec{s}=-4\pi G M_{interna}$
Tomando como superficie gaussiana una esfera de radio r centrada en el centro del planeta, y debido a la simetría del problema el módulo del campo será constante en toda la superficie, podemos plantear $|\vec{g}|=\frac{4\pi G M_{interna}}{4\pi r^2}=G\frac{M_{interna}}{r^2}$

b.1 La masa interna es la masa del planeta, y el campo es equivalente al generado por una masa puntual situada en el centro del planeta

$$|\vec{g_{ext}}|=G\frac{C\pi R^4}{r^2}$$

b.2 La masa interna de una esfera de radio r se obtiene de manera análoga al apartado a, que quedará en función de r. Sustituyendo

$$|\vec{g_{\text{int}}}|=G\frac{C\pi r^4}{r^2}=GC\pi r^2$$

En cuanto a justificar la solución obtenida, se puede comprobar:
-Que para r=0, el campo interno es nulo y que aumenta hasta llegar a r=R
-Que para r=R coinciden ambos valores:

$$|\vec{g_{ext}}|(r=R)=GC\pi\frac{R^4}{R^2}=GC\pi R^2=|\vec{g_{\text{int}}}|(r=R)$$

-Que para r>R el campo externo va disminuyendo en valor
c) Si altura es 3R, el radio de la órbita es 4R.
c.1 El momento angular es una magnitud vectorial. Damos su módulo e indicamos cualitativamente dirección y sentido, tomando como sistema de coordenadas plano xy en el plano ecuatorial de la órbita, origen en el centro del planeta, y z dirigido en el sentido de velocidad angular vectorial $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

Para calcular su módulo necesitamos la velocidad
En una órbita circular estable con R_O=4R podemos igualar fuerza centrípeta y gravitatoria.

$$F_g = F_c \Rightarrow |\vec{g}_{ext}| m = \frac{mv^2}{R_o} \Rightarrow G C \pi \frac{R^4}{(4R)^2} = \frac{v^2}{4R} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{4} G C \pi R^3$$

Como en la órbita circular velocidad y posición son siempre perpendiculares

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| m |\vec{v}| = 4 R m \sqrt{\frac{1}{4} G C \pi R^3} = 2 m \sqrt{GC \pi R^5}$$

La dirección será perpendicular al plano ecuatorial, y el sentido el mismo hacia z positivas, el mismo que la velocidad angular.
c.2 La variación de energía la obtenemos restando la energía en cada una de las órbitas.
La energía en la órbita es la energía mecánica, suma de energía cinética y potencial. Se puede deducir fácilmente que en órbita estable $E_m = \frac{E_p}{2} = \frac{-1}{2} \frac{GMm}{R_o}$

Órbita 1 (inicial): R_o=4R.
Órbita 2 (final, a la que pasa): R_o=2R (altura R implica radio de órbita 2R)

$$\Delta E_m = E_{m2} - E_{m1} = \frac{-1}{2} GMm \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{-1}{2} G 4 C \pi R^4 m \left(\frac{2-1}{4R}\right) = \frac{-1}{8} GC \pi R^3 m$$