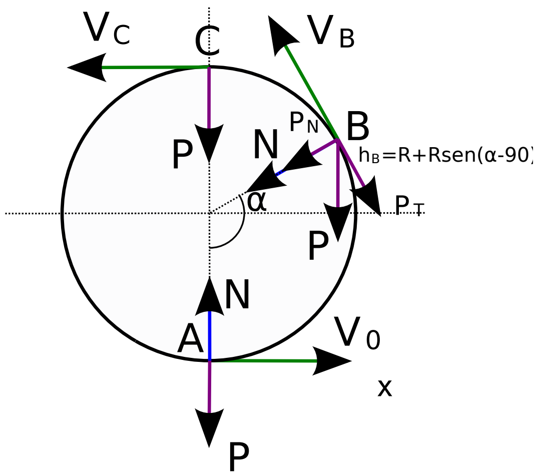
2. Tenemos una pista vertical circular de 12 m de radio. Desde el punto más bajo lanzamos por la parte interna una masa puntual M con velocidad V_0. Calcular:
a) Valor mínimo de V_0 para que alcance un punto B describiendo un ángulo a (90º < alfa < 180º) sin desprenderse de la circunferencia.
b) Valor de V_0 para que pase por la vertical ejerciendo una fuerza igual a un tercio de su peso.

a) Asumimos que no hay rozamiento, por lo que se conserva la energía mecánica.
Llamamos punto A al punto más bajo, y tomamos h=0 en ese punto, por lo que la energía mecánica en A será solamente la cinética, asociada a V_0.
Cuando el cuerpo llega al punto B:
-Para $\alpha<90º$ no se desprende de la circunferencia ya que el peso empuja el cuerpo a la pista.
-Para $\alpha>90º$ se puede desprender de la circunferencia ya el peso empuja el cuerpo hacia fuera de la pista; la existencia de inercia hace que el cuerpo intente continuar en una trayectoria recta y se pegue la la pista, que ejerce una fuerza normal con efecto de fuerza centrípeta, asumiendo pista rígida.
Para que el cuerpo no se desprenda, tiene que ocurrir que la velocidad sea suficientemente alta para que, a la altura del punto B, sin fuerza normal, la componente radial del peso haga que la trayectoria tenga de radio el de la pista.
Eso implica que en el punto B el cuerpo no puede estar parado, ya que existirá cierta fuerza normal, y por lo tanto cierta velocidad al ser $a_n=v^2/R$, y lo que tenemos que plantear es el valor mínimo para que llegue a ese punto sin desprenderse.
En el punto más alto (C, $\alpha=180º$) y en el caso límite la única fuerza centrípeta será la gravitatoria.



$$g=\frac{v_{arriba}^2}{R}\Rightarrow v_{arriba}^2=gR$$
Si hacemos un planteamiento energético
$$E_{m abajo}=E_{m arriba}\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{M}V_0^2=\frac{1}{2}\cancel{M}v_{arriba}^2+\cancel{M}g\,2\,R$$
$$V_0^2=gR+4\,gR=5\,gR\Rightarrow V_0=\sqrt{5\,gR}$$
Numéricamente, R=12 m, g=9,8 m/s^2 (no es dato del enunciado pero lo asumimos). Con dos cifras significativas
$$V_0=\sqrt{5\cdot 9{,}8\cdot 12}=24\,m/s$$
Pero se pide para un punto B cualquiera, y en ese caso la fuerza centrípeta es solo una componente del peso.
Debemos obtener una solución en función de α y para $\alpha=180º$ se debe obtener la solución anterior
$$g\cdot sen(\alpha-90)=\frac{v_B^2}{R}\Rightarrow v_B^2=gR\,sen(\alpha-90)$$
Si hacemos un planteamiento energético
$$E_{m abajo}=E_{mB}\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{M}V_0^2=\frac{1}{2}\cancel{M}v_B^2+\cancel{M}g(R+Rsen(\alpha-90))$$
$$V_0^2=gRsen(\alpha-90)+2\,gR(1+sen(\alpha-90))$$
$$V_0^2=gR(2+3\,sen(\alpha-90))$$
$$V_0=\sqrt{gR(2+3\,sen(\alpha-90))}$$
Numéricamente, R=12 m, g=9,8 m/s^2 (no es dato del enunciado pero lo asumimos).
$$V_0=10{,}84\sqrt{(2+3\,sen(\alpha-90))}[m/s]$$
Podemos validar que si $\alpha=180º$ llegamos a la solución anterior.

b) La fuerza que se indica es la fuerza sobre la pista que ejerce M, luego la normal que ejerce la pista sobre la masa es la reacción y tiene el mismo módulo.

$$\cancel{M}g+\frac{1}{3}\cancel{M}g=\cancel{M}\frac{v_{arriba}^2}{R}\Rightarrow v_{arriba}^2=\frac{4}{3}gR$$

Con el mismo planteamiento energético

$$E_{m\,abajo}=E_{m\,arriba}\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{M}V_0^2=\frac{1}{2}\cancel{M}V_{arriba}^2+\cancel{M}g\,2\,R$$

$$V_0^2=\frac{4}{3}gR+4\,gR=\frac{16}{3}gR\Rightarrow V_0=4\sqrt{\frac{gR}{3}}$$

Numéricamente, con dos cifras significativas $V_0=4\sqrt{\frac{9{,}8\cdot12}{3}}=25\,m/s$

Validación: la velocidad en b) debe ser mayor que en a)