1. Una gota de lluvia cae desde una nube con una velocidad inicial v_0. Suponga que el tamaño no varía y que la resistencia con el aire es $R=\beta v^2$. Determine la ecuación que nos relaciona la velocidad de la gota con la altura a la que se encuentra.

Referencias:
Resuelto por Antonio Abrisqueta García para www.eltemario.com
http://fyqwiki.wikispaces.com/file/view/Examen+Opos+CV+2008.doc
Enunciado similar a Extremadura 1996-Física 1 y Madrid 2004 Física 2

Comentario: En Extremadura 1996 también se usa "resistencia" y no es la fuerza total sino que hay que añadir masa, lo que allí se deduce de las unidades. Como aquí no se dan unidades, asumimos que $F=R=\beta v^2$, por lo que la resolución es distinta.

Tomamos sistema de referencia: eje x vertical, sentido positivo hacia abajo, x=0 y t=0 en instante inicial en el que $v=v_0$, con lo que x y v son positivas y aumentan, y la aceleración es positiva.
Se nos pide relacionar con la altura, pero podemos relacionar altura medida respecto al suelo con la x elegida en la expresión final.
Aplicamos la 2ª ley de Newton (despreciamos el empuje del aire frente al peso)

$$mg-\beta v^2=m a=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=m v\frac{dv}{dx}$$

$$g-\frac{\beta}{m}v^2=\frac{vdv}{dx}\Rightarrow dx=\frac{vdv}{g-\frac{\beta}{m}v^2}\Rightarrow\int_0^x dx=\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{g-\frac{\beta}{m}v^2}$$

$$x=\frac{-m}{2\beta}\left[\ln\left(g-\frac{\beta}{m}v^2\right)\right]_{v_0}^{v}+c_1\Rightarrow-2\frac{\beta}{m}x+c_2=\ln\left(\frac{g-\frac{\beta}{m}v^2}{g-\frac{\beta}{m}v_0^2}\right)$$

$$\left(g-\frac{\beta}{m}v_0^2\right)c_3 e^{-2\frac{\beta}{m}x}=g-\frac{\beta}{m}v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{m}{\beta}\left(g-\left(g-\frac{\beta}{m}v_0^2\right)c_3 e^{-2\frac{\beta}{m}x}\right)}$$

$$v=\sqrt{\frac{m}{\beta}\left(g+\left(\frac{\beta}{m}v_0^2-g\right)c_3 e^{-2\frac{\beta}{m}x}\right)}$$

Planteamos condición: $x=0 \rightarrow v=v_0$

$$v_0^2=\frac{m}{\beta}\left(g+\left(\frac{\beta}{m}v_0^2-g\right)c_3 e^{-2\frac{\beta}{m}0}\right)$$

$$\frac{\beta}{m}v_0^2-g=\left(\frac{\beta}{m}v_0^2-g\right)c_3\Rightarrow c_3=1$$

Sustituyendo

$$v=\sqrt{\frac{m}{\beta}\left(g+\left(\frac{\beta}{m}v_0^2-g\right)e^{-2\frac{\beta}{m}x}\right)}$$

Validaciones físicas:
-Si g mayor la velocidad es mayor
-Si $\beta=0$, sale una indeterminación 0/0, pero si se hace un desarrollo por Taylor en x=0 (lo hacemos de v2 en lugar de v por simplificar, buscando llegar a $v^2-v_0^2=2gx$)
http://www.wolframalpha.com/input/?i=taylor+series+a%2Fb*%28c%2B%28b%2Fa*d^2-c

%29*e^%28-2b%2Fa*x%29%29
se tiene que todos los términos dependen de b y se anulan salvo los dos primeros, con lo que
$v^2=v_0^2+2gx$ que es una expresión de MRUA
-La velocidad aumenta según cae, pero tiene un límite, ya que si x=∞ (cae durante mucho tiempo), la velocidad es constante, velocidad terminal, y el valor es el del apartado a

$$v(x=\infty)=\sqrt{m\frac{g}{\beta}}$$

Modificamos la expresión para que sea en función de altura, tal y como se pide en enunciado. Si llamamos h a la variable altura, y H al valor de altura inicial.
x=0 implica h=H, y x=H implica h=0, x=H/4 implica h=3H/4, cuando x crece h decrece
La relación es **x=H-h**, y sustituyendo en la expresión para que quede en función de altura

$$v=\sqrt{\frac{m}{\beta}\left(g+(\frac{\beta}{m}v_0^2-g)e^{-2\frac{\beta}{m}(H-h)}\right)}$$

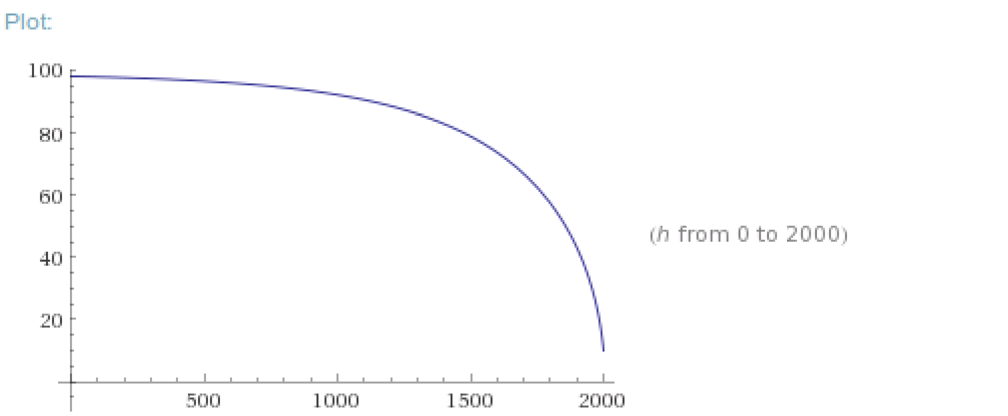
Representamos para unos valores arbitrarios (para masa gota y altura nube, valores típicos)
m=1/20 g = $5\cdot10^{-5}$ kg
g=9,8 m/s^2
v_0=10 m/s
H=2 km = $2\cdot10^3$ m
β=$5\cdot10^{-8}$ N·s^2/m^2

$$v=\sqrt{\frac{5\cdot10^{-5}}{5\cdot10^{-8}}\left(9{,}8+(\frac{5\cdot10^{-8}}{5\cdot10^{-5}}10^2-9.8)e^{-2\frac{5\cdot10^{-8}}{5\cdot10^{-5}}(2\cdot10^3-h)}\right)} \qquad v(h=-\infty)=\sqrt{5\cdot10^{-5}\frac{9{,}8}{5\cdot10^{-8}}}=99\,m/s$$

$$v=\sqrt{10^3(9{,}8+(0{,}1-9{,}8)e^{-4+2\cdot10^{-3}h})}$$

Si lo representamos http://www.wolframalpha.com/input/?i=plot++sqrt+{+1e3*(9.8+%2B(0.1-9.8)e^{-4+%2B+2e(-3)+h})}+from+h%3D0+to+h%3D2e3

plot	$\sqrt{1\times10^3\left(9.8+(0.1-9.8)e^{-4+2\times10^{-3}h}\right)}$	$h = 0$ to 2×10^3



En eje x está la altura, en eje y la velocidad. Se ve como mientras desciende desde la altura inicial (sería de derecha a izquierda en la gráfica) la velocidad va aumentando pero llega a un valor límite que es el calculado.