



Prueba B 3. Problemas de FÍSICA

Problema 3

Un conjunto de 100 espiras de radio $R=40,0$ cm están situadas en un plano Oyz, de tal forma que puedan considerarse coplanarias y de anchura despreciable, estando su centro en $O(0,0,0)$. Se sabe que por las espiras circula una corriente de $10,0$ A.

1°. Obtenga la expresión del campo magnético generado por el conjunto de las espiras en un punto $P(x,0,0)$.

2°. Contemple otro conjunto de espiras similar al anterior formado por 50 espiras de radio $r=2,0$ cm situado en un punto del eje Ox. Determine por aproximación, al considerar que $r \ll R$, el flujo magnético que lo atraviesa cuando está situado en $P(x,0,0)$.

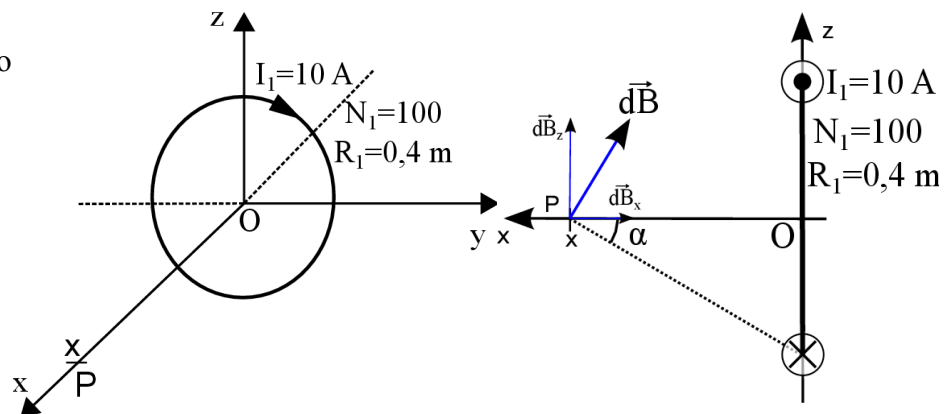
3°. Ahora, el conjunto de espiras pequeñas se desplaza a lo largo del eje Ox con una velocidad de 20 cm/s. ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida en ella, al alcanzar el punto $P'(0,20;0;0)$ m?

4°. Considere ahora que por las espiras pequeñas circula una corriente de $20,0$ A en sentido contrario al de las grandes, y que se encuentran en reposo en la posición P' . ¿En qué punto del eje Ox se anula el campo magnético?

Dato: permeabilidad magnética vacío $= 4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$

> Aunque en este problema no se dan indicaciones sobre cifras significativas, viendo lo indicado en el problema 2, y viendo que los datos suelen tener 3 cifras significativas, cuando aplica los resultados se expresan con 3 cifras significativas.

1°) Realizamos diagramas, donde asumimos un sentido para la corriente ya que no se indica en el enunciado; asumimos el giro en el sentido de las agujas del reloj visto desde x positivas, según diagrama (la elección de sentido es arbitraria, pero en función de la elección hay que representar y razonar).



Se trata de un caso de “espiras juntas y apretadas”, que sabemos que en el centro de la espira tendrá un módulo $B = N \frac{\mu I}{2R}$, pero se pide para todo el eje, y se pide deducir.

Para calcular el campo total utilizamos el principio de superposición y representamos el dB que genera un dl de espira, de longitud $dl=R \cdot d\theta$.

Con el diagrama se puede razonar que en el eje de la espira por simetría las componentes de campo que están fuera del eje x se cancelan, y que todas las componentes de campo sobre el eje x están dirigidas hacia el mismo sentido. Los vectores \vec{u}_r y dl son perpendiculares entre sí, por lo que

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad r^2 = x^2 + R^2 \quad \vec{dl} \times \vec{u}_r = dl = d\theta \cdot R \quad B_x = B \sen \alpha = B \frac{R}{r}$$

$$B = N \int dB_x = N \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{4\pi} I \frac{R^2}{r^3} d\theta = \frac{N \mu I R^2}{2r^3}$$

Si lo expresamos en función de x que es lo que pide el enunciado $B = \frac{N \mu I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$



Si sustituimos por los valores dados y utilizando 3 cifras significativas (como los datos R e I)

$$B = \frac{100 \cdot 4 \pi 10^{-7} \cdot 10,0 \cdot 0,400^2}{2(x^2 + 0,400^2)^{3/2}} = \frac{3,20 \cdot 10^{-5} \pi}{(x^2 + 0,400^2)^{3/2}} [B \text{ en } T, x \text{ en } m]$$

Validación: en el origen $x=0, r=R, B=B_x, \alpha=90^\circ \Rightarrow B = N \frac{\mu I}{2} R$

(En expresiones de este apartado usamos I, N, R, aunque en diagrama y apartados siguientes que aparecen nuevos valores usamos I_1, N_1 y R_1 para diferenciarlos)

2º) Tomamos $N_2=50$ para distinguir de $N_1=100$ anterior.

Como $r \ll R$ podemos considerar el campo magnético generado por las primeras espiras de radio R constante en todo el interior de las segundas espiras de radio r.

$$\Phi = N_2 \int B dS = n_2 B \int dS = N_2 B \pi r^2 = \frac{N_2 \pi r^2 N_1 \mu I_1 R_1^2}{2(x^2 + R_1^2)^{3/2}}$$

Si sustituimos por los valores dados y utilizando 2 cifras significativas como el dato de r, y reutilizando cálculos realizados para B:

$$\Phi = \frac{50 \cdot \pi \cdot 0,020^2 \cdot 3,20 \cdot 10^{-5} \pi}{(x^2 + 0,400^2)^{3/2}} = \frac{6,4 \cdot 10^{-7} \pi^2}{(x^2 + 0,400^2)^{3/2}} [\Phi \text{ en } Wb, x \text{ en } m]$$

3º) $v = \frac{dx}{dt} = 0,20 \text{ m/s}$ Asignamos un signo a la velocidad: desconocemos el sentido según enunciado, y hacemos que sea en sentido de x positivas.

$$\varepsilon = \frac{-d\Phi}{dt} = \frac{N_2 \pi r^2 N_1 \mu I_1 R_1^2}{2} \left(\frac{-3}{2} \right) (x^2 + R_1^2)^{-5/2} 2x \frac{dx}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{-3}{2} N_2 \pi r^2 N_1 \mu I_1 R_1^2 (x^2 + R_1^2)^{-5/2} x v$$

Si sustituimos por los valores dados y utilizando 2 cifras significativas como el dato de r, v (asumimos que se indicaban 20, cm/s, porque siendo puristas tendría una cifra significativa), y coordenada de P', y reutilizando cálculos realizados para el flujo:

$$\varepsilon = -3 \frac{6,4 \cdot 10^{-7} \pi^2 0,20 \cdot x}{(x^2 + 0,400^2)^{5/2}} = \frac{-3,8 \cdot 10^{-7} \pi^2 x}{(x^2 + 0,400^2)^{5/2}} [\varepsilon \text{ en } V, x \text{ en } m]$$

Sustituimos para el punto dado, $x=0,20 \text{ m}$

$$\varepsilon = \frac{-3,8 \cdot 10^{-7} \cdot \pi^2 \cdot 0,20}{(0,20^2 + 0,400^2)^{5/2}} = -4,2 \cdot 10^{-5} V$$

4º) El campo magnético generado por las espiras pequeñas estará también en el eje x, pero sentido opuesto. Llamamos I_2 a la corriente de 20,0 A de las segundas espiras, para diferenciarla de I_1 .

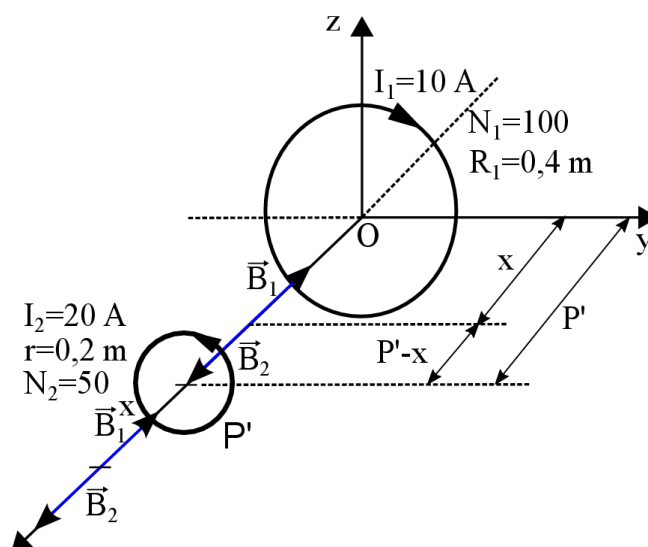
$$\frac{N_1 \mu I_1 R_1^2}{2(x^2 + R_1^2)^{3/2}} = \frac{N_2 \mu I_2 r^2}{2((P'_x - x)^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\left(\frac{N_1 I_1 R_1^2}{N_2 I_2 r^2} \right)^{2/3} = \frac{x^2 + R_1^2}{(P'_x - x)^2 + r^2}$$

Llamamos C al primer término

$$C = \left(\frac{100 \cdot 10,0 \cdot 0,400^2}{50 \cdot 20,0 \cdot 0,020^2} \right)^{2/3} = 400^{2/3} \approx 54,29$$

(Lo tomamos con 4 cifras, el redondeo lo hacemos con el resultado final)





P'_x está dado en el punto 3º y son 0,20 m

$$54,29(P'_x{}^2 + x^2 - 2P'_x x + r^2) = x^2 + R^2$$

$$53,29x^2 - 54,29 \cdot 2 \cdot 0,2x + (54,29 \cdot 0,20^2 + 0,020^2 - 0,400^2) = 0$$

$$53,29x^2 - 21,72x + 2,01 = 0$$

$$x = \frac{21,72 \pm \sqrt{21,72^2 - 4 \cdot 53,29 \cdot 2,01}}{106,58} = \frac{21,72 \pm 6,58}{106,58} = x = 0,142 \text{ m}$$
$$x = 0,265 \text{ m}$$

Dos puntos a ambos lados de la coordenada $x=0,20$ del punto P' donde está la espira pequeña.

Los resultados debemos expresarlos con 2 cifras significativas, que es el número menor de cifras significativas que tenían los datos proporcionados ($r=2,0$ cm)

Las posiciones son $x=0,14$ m , $x=0,27$ m