enrique@fiquipedia.es Revisado 5 abril 2020

Prueba B 3. Problemas de FÍSICA

Problema 2

En un hipotético problema se contempla la existencia de dos esferas iguales y homogéneas de acero, de diámetro D=100,0 m que tienen sus respectivos centros en los puntos A(0;1000;0) y B(0;-1000;0) de un sistema de referencia Oxyz, cuyas coordenadas están expresadas en unidades SI.

1º. Obtenga la expresión de la energía potencial gravitatoria de una bola de masa m_C situada en un punto P(x;0;0), debida exclusivamente a la interacción con las esferas.

2º. La bola C, que se encuentra inicialmente en el punto P_1(-1000;0;0), se desplaza sin rozamiento a lo largo del eje Ox. Calcule la velocidad de la bola cuando alcanza el punto P_2(200;0;).

3º. Al llegar a P_2 la bola C choca contra un resorte de masa despreciable, cuyo eje coincide con Ox, comprimiéndose 2,0 cm. Calcule la constante elástica del resorte.

4º. Bajo la acción del resorte, la bola C vuelve a desplazarse por Ox. Calcule la velocidad y aceleración de la bola en O(0;0;0).

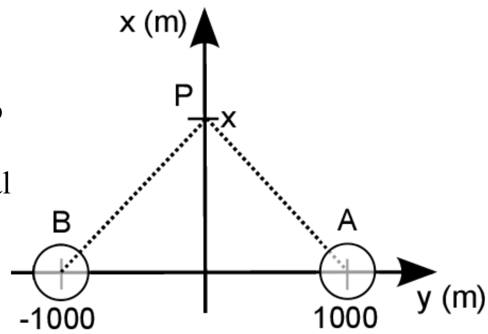
5º. Determine en qué puntos del eje Ox la aceleración de la bola C es máxima.

NOTA. En cada uno de los cálculos se valorará la expresión de los resultados teniendo en cuenta las cifras significativas de los datos.

Datos: G=6,67x10^{-11} Nm^{2}kg^{-2}, ρ_{acero}=8,00x10^3 kgm^{-3}

*Nota: En original errata: indicaba P_2(200;0;), corregido oralmente durante examen para indicar P_2(200;0;**0**)*

Apartado 5º cierta similitud con 2006 Castilla y León Física 3



1º) Si no se diese el diámetro de las esferas, se utilizaría sin más un modelo puntual, pero al darlo hay que hacer aclaraciones: sí usamos el modelo puntual con la esfera C pero no directamente con las A y B.

Para las esferas A y B, dado que las distancias son superiores al radio, podemos utilizar la expresión del campo en su exterior como si fueran puntuales, ya que es el que se obtiene utilizando Gauss.

Utilizando el principio de superposición:

$$E_p(C)=E_{pA}(C)+E_{pB}(C)$$

Para la energía potencial podemos deducir la expresión o utilizarla directamente

$$E_p=W_{r\to\infty}=\int_r^{\infty} G\frac{M\,m}{r^2}dr=-G\frac{M\,m}{r}$$

Para las esferas A y B, m_A=m_B=M: $\rho=\frac{M}{V}\Rightarrow M=\rho V=8\cdot10^3\frac{4}{3}\pi 50^3=4{,}19\cdot10^9\,kg$

Realizamos un diagrama con el plano xy, ya que la coordenada z siempre es 0.

$$r=\sqrt{1000^2+x^2}\Rightarrow E_p(C)=-2\frac{GMm_C}{\sqrt{1000^2+x^2}}=\frac{-0{,}56\,m_C}{\sqrt{1000^2+x^2}}$$

2º) P_1: E_c=0 (reposo), y $E_p=\frac{-0{,}56}{\sqrt{1000^2+(-1000)^2}}m_C=\frac{-0{,}56}{\sqrt{2}\,1000}m_C$

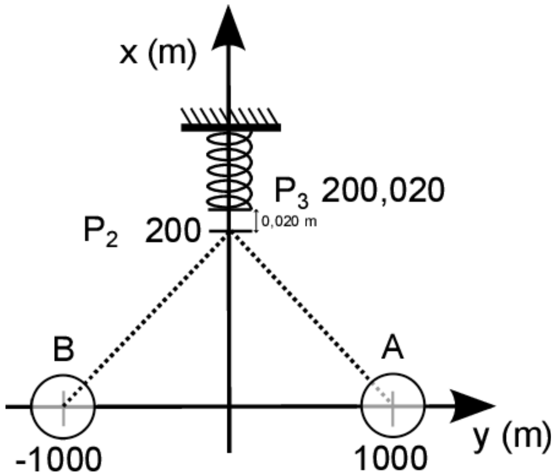
P_2: $E_c=\frac{1}{2}m_c v^2$ $\quad E_p=\frac{-0{,}56}{\sqrt{1000^2+200^2}}m_C=\frac{-0{,}56}{1019{,}8}m_C$

Como solamente actúa la fuerza gravitatoria que es conservativa, la energía mecánica se conserva

$$\frac{-0{,}56}{\sqrt{2}1000}\cancel{m_C}=\frac{1}{2}\cancel{m_C}v^2-\frac{0{,}56}{1019{,}8}\cancel{m_C}\Rightarrow v=\sqrt{2\cdot(\frac{-0{,}56}{\sqrt{2}1000}+\frac{0{,}56}{1019{,}8})}=1{,}75\cdot10^{-2}\,m/s$$

(3 cifras significativas)

3º) De nuevo planteamos conservación de energía mecánica, solo que ahora cuando el muelle se comprime los 2 cm, la E_c es cero y la energía potencial elástica es máxima. Consideramos la E_p gravitatoria sin cambio (miles de metros frente a centímetros, el diagrama no está a escala)



Inicial P_2: E_{pg} conocida, $E_{p\,elástica}=0$, $E_c=\frac{1}{2}m_c v^2$

Final P_3: E_{pg} "sin cambios", $E_{p\,elástica}=\frac{1}{2}kx^2$, Ec =0

$$\frac{1}{2}m_c v^2=\frac{1}{2}k\,x_{máx}^2 \Rightarrow k=\frac{m_C v^2}{x_{máx}^2}=m_C\frac{0{,}018^2}{0{,}02^2}=m_c\,0{,}81$$

El valor de k depende de la masa: tendrá que tener mayor constante elástica para parar una masa mayor en 2 cm.

4º) De nuevo hay conservación de energía: podemos usarla con P_1, P_2 ó P_3: Tomamos P_1.

$$-0{,}56\frac{m_C}{\sqrt{2}\cdot 1000}=-0{,}56\frac{m_C}{1000}+\frac{1}{2}m_c v_O^2$$

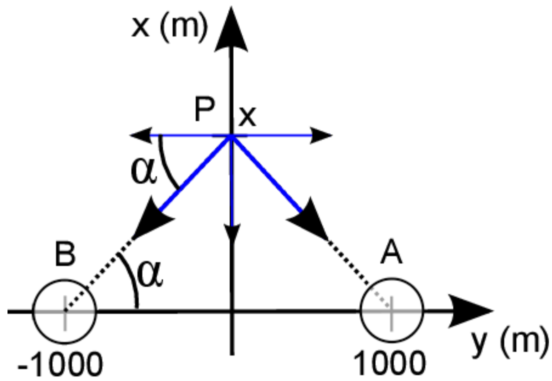
$$v_0=\sqrt{2\cdot\frac{0{,}56}{1000}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=1{,}80\cdot 10^{-2}\,m/s$$

(3 cifras significativas)

Se pide la aceleración en (0,0,0); al ser las dos masas iguales por simetría en el origen la fuerza total es nula y por lo tanto la aceleración también es nula.

(La aceleración se calcula en punto 5º para todos los puntos del eje x y se podría sustituir, comprobando que para x=0 se obtiene aceleración nula)

5º) Para obtener la aceleración máxima, obtenemos su expresión en función de x y derivamos respecto a x.
En el diagrama (con eje x representado en vertical) vemos que las componentes en eje y se cancelan



$$sen\,\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{1000^2+x^2}}$$

$$F_x=m\cdot a_x \Rightarrow 2G\frac{M\,\cancel{m_C}}{r^2}sen\,\alpha=\cancel{m_c}\cdot a_x$$

$$a_x=2\,G\,M\frac{x}{r^3}=2\,GM\frac{x}{(1000^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\,a_x}{dx}=2\,GM\frac{(1000^2+x^2)^{3/2}-3/2\,(1000^2+x^2)^{1/2}\,2\,x\cdot x}{(1000^2+x^2)^3}$$

El máximo se produce cuando la derivada es cero (podríamos obtener la segunda derivada para garantizar que es máximo y no mínimo, pero es excesivo)

$$\frac{d\,a_x}{dx}=0\Rightarrow(1000^2+x^2)^{1/2}((1000^2+x^2)-3\,x^2)=0\Rightarrow x^2=\frac{1000^2}{2}\Rightarrow x=\frac{\pm 1000}{\sqrt{2}}m=\pm 7{,}07\,10^2\,m$$

(3 cifras significativas)

Nota: el enunciado indica explícitamente "En cada uno de los cálculos se valorará la expresión de los resultados teniendo en cuenta las cifras significativas de los datos.", y por eso en los datos dados se indica: Datos: $G=6{,}67x10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$, $\rho_{acero}=8{,}00x10^3\,kgm^{-3}$

Esos datos tienen 3 cifras significativas, luego los cálculos no pueden aumentar el número de cifras significativas. Apartado 1º y 3º son expresiones, pero en 2º, 4º y 5º hay que poner 3 cifras significativas.