Prueba B 3. Problemas de FÍSICA

Problema 1

Una varilla homogénea de masa m y longitud l, gira alrededor de un eje horizontal perpendicular a ella por uno de sus extremos. La varilla se suelta desde la posición horizontal.

1º. Obtenga la expresión del momento de inercia de una varilla con relación a un eje perpendicular situado en un extremo.

2º. Obtenga, en función del ángulo θ que la varilla forma con la vertical, las expresiones de:

a) la aceleración angular de la varilla

b) la aceleración instantánea de su centro de masa

3º. Determine la reacción que el eje de giro ejerce sobre la varilla

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/varilla/varilla.htm#Fuerzas%20Fx%20y%20Fy%20que%20se%20ejercen%20sobre%20la%20varilla%20en%20su%20eje%20de%20rotaci%C3%B3n sería caso concreto de θ_0=90º.

1º) De manera general $I=\int r^2 dm$

Consideramos el grosor de la varilla despreciable y definimos $\lambda=\frac{m}{l}$

$m=\lambda l \Rightarrow dm=\lambda dl$

Para este apartado consideramos la varilla sobre el eje x, con un extremo en el origen.

$I=\int_0^l x^2 \lambda dx=\lambda[\frac{x^3}{3}]_0^l=\lambda\frac{l^3}{3}=\frac{1}{3}ml^2$

Nota: conocida la expresión para el momento de inercia de una varilla respecto su centro de masas,

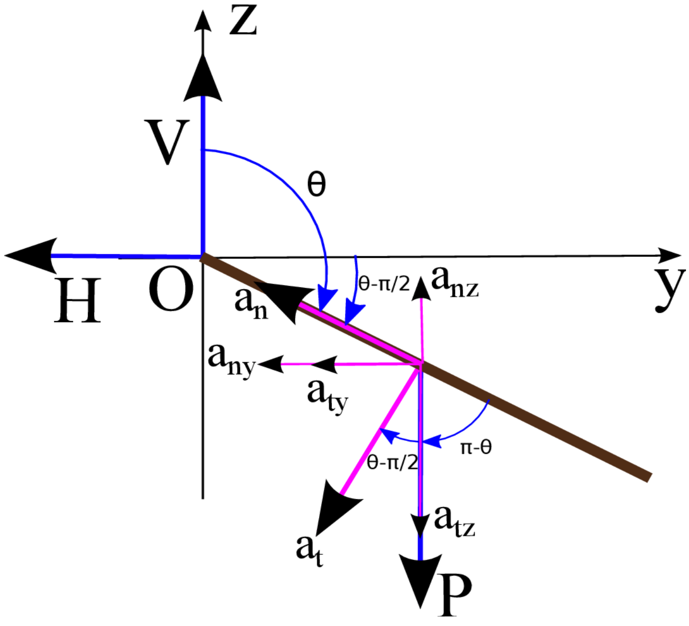
$I_{CM}=\frac{1}{12}ml^2$, se podría utilizar el teorema de Steiner $I_o=I_{CM}+md^2$

$I_o=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{2})^2=(\frac{1}{12}+\frac{1}{4})ml^2=\frac{1}{3}ml^2$

2º) Tomamos posición inicial varilla eje y, y como eje de giro el eje x.

Enunciado nos obliga a que usemos θ como ángulo formado por la varilla con el eje vertical (que tomamos como z), y lo tomamos como creciente, de modo que en t=0 → θ=90º, si t>0 → θ>90º

>Para simplificar expresiones usamos trigonometría: sen(θ- π/2)=-cosθ, cos(θ- π/2) = senθ



a) $M_o=I\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{M_o}{I}$

El vector momento de la fuerza respecto de O (la única fuerza a contemplar sería el peso) estaría dirigido hacia x negativas (hacia dentro en el diagrama), y el ángulo formado por r respecto de O y por el peso sería π/2-(θ-π/2)=π-θ

$|\vec{M}_o|=|\vec{r}\, x\, \vec{F}|=|\vec{r}|\cdot|\vec{F}|\cdot sen\,\phi$

El ángulo formado φ=π-θ, y sen(π-θ)=sen(θ)

$$|\vec{M}_o|=\frac{l}{2}\cdot mg\cdot sen(\theta) \qquad \alpha=\frac{\frac{1}{2}\cancel{m}gl\,sen(\theta)}{\frac{1}{3}\cancel{m}l^2}=\frac{3}{2}\frac{g}{l}sen(\theta)$$

Consistente con que la aceleración angular con el convenio de signos tomado debe ser positiva si θ>90º

b) $a_t=\alpha\cdot R=\frac{3}{2}\frac{g}{l}\frac{l}{2}sen\theta=\frac{3}{4}g\,sen\theta$

Para calcular al aceleración normal: $a_n=\omega^2\cdot R$, y calculamos ω energéticamente.

-Situación inicial, referencia varilla en horizontal, $E_p=0$, $E_c=0$

-Situación final, varilla girando y formando ángulo θ con el centro de masas (a distancia l/2 de O) a altura negativa h=-(l/2)sen(θ- π/2)=(l/2)cosθ

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}I\omega^2=0$$

$$\cancel{m}g\frac{l}{2}\cos\theta=\frac{-1}{2}\frac{1}{3}\cancel{m}l^2\omega^2\Rightarrow g\cos\theta=\frac{-l}{3}\omega^2\Rightarrow\omega^2=\frac{-3g\cos\theta}{l}$$

$$a_n=\omega^2R=\frac{-3g\cos\theta}{l}\frac{l}{2}=\frac{-3}{2}g\cos\theta$$

Los valores indicados son módulos de aceleraciones, que están indicadas vectorialmente en diagrama, teniendo en cuenta que se pide aceleración instantánea total de la varilla y $\vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$

>La expresión puede parecer confusa, como que un cuadrado da un número negativo, pero si θ está entre 90º y 180º, su coseno es negativo, la altura es negativa, y el módulo a_n es positivo.

3º) Según el enunciado, como no se indica explícitamente "en función θ" como en apartado 2º, se podría calcular la reacción solamente para t=0 (θ=90º).

Lo hacemos dinámicamente, para cualquier instante (y luego concretamos en t=0 (θ=90º)), tomando el giro en el plano yz, de modo que las coordenadas tendrán signo según el diagrama. Al indicar a_n y a_t usamos su módulo positivo.

La reacción del eje la descomponemos en dos componentes H y V, para las que no fijamos signo a priori, simplemente las representamos en diagrama y tomamos H y V como sus módulos, y el signo indicará sentido respecto a los sentidos positivo de ejes z e y utilizados.

La respuesta es la reacción total será $\vec{R}=\vec{H}+\vec{V}$

Eje z:

$V-P=m\cdot a_{nz}-m\cdot a_{tz}$

$V - mg= m\cdot a_n\cdot sen(\theta- \pi/2) -m\cdot a_t\cdot\cos(\theta- \pi/2)$

Eje y:

$-H =-m\cdot a_{ny}-ma_{ty}$

$H = m\cdot a_n\cdot\cos(\theta- \pi/2) + m\cdot a_t\cdot sen(\theta- \pi/2)$

Eje z: $V - mg= -m\cdot a_n\cdot\cos\theta -m\cdot a_t\cdot sen\theta$

Eje y: $H = m\cdot a_n\cdot sen\theta - m\cdot a_t\cdot\cos\theta$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en apartado 2º: $a_t=\frac{3}{4}g\,sen\theta$ y $a_n=\frac{-3}{2}g\cos\theta$

$$V-mg=m\frac{3}{2}g\cos^2\theta-m\frac{3}{4}g\,sen^2\theta$$

$$V=mg\left(1+\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{4}sen^2\theta\right)=mg\left(1+\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{3}{4}(1-\cos^2\theta)\right)=\frac{1}{4}mg(1+9\cos^2\theta)$$

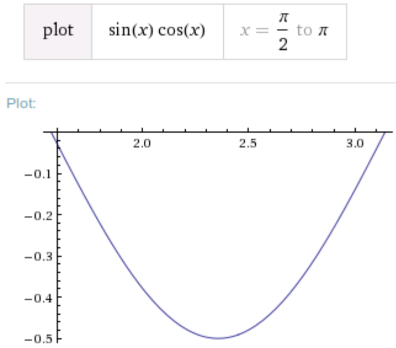
$$H=-m\frac{3}{2}g\cos\theta\, sen\,\theta-m\frac{3}{4}g\, sen\,\theta\cos\theta$$

$$H=mg\, sen\,\theta\cos\theta\left(\frac{-3}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{-9}{4}mg\, sen\,\theta\cos\theta$$

Comprobamos los valores para t = 0 (θ=90º) en la que las expresiones se simplifican y realizamos validación lógica/física:

H: La expresión cumple que si θ=90º, H=0, lo que parece correcto.

Para θ>90º y hasta 180º (cuando la varilla esté vertical) vemos (representando sen(x)·cos(x)) que el valor de H positivo, lo que supone que es una fuerza en el sentido representado; el pivote realiza fuerza hacia la izquierda en diagrama, lo que podemos asociar a generar aceleración normal asociada al giro, ya que la aceleración normal es radial y dirigida hacia el centro, aunque también podemos ver que V, proyectado sobre la varilla siempre que θ no sean 90º sí genera una componente normal y centrípeta.



wolframalpha

V: Para θ=90º,V=(1/4)mg, ya que a_T=3/4g.

Para θ>90º y hasta 180º (cuando la varilla esté vertical) tenemos V>0; el pivote debe compensar la tendencia de la barra a caer ejercida por el peso, que siempre tira hacia abajo en diagrama, además de contribuir en la fuerza centrípeta.

Viendo la expresión para V se puede comprobar no hay ningún valor en el que V sea 0 ni negativo para θ en el rango 0º a 180º.