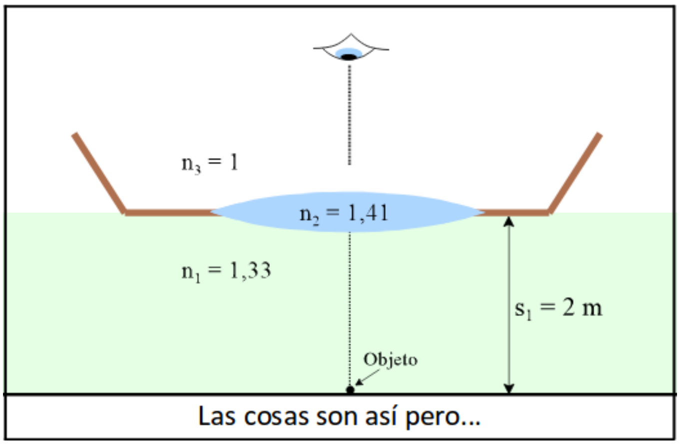
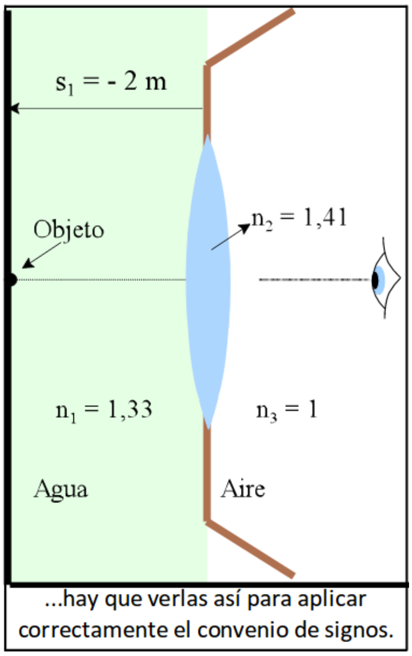
6. En el fondo de una barca hay una pieza circular de vidrio que hace de lente y facilita la visión subacuática. El índice de refracción del aire es 1, el del agua 1,33 y el del vidrio 1,41. La pieza de vidrio, que podemos considerar como una lente delgada, tiene forma biconvexa con el mismo radio de curvatura en ambas caras. Si la distancia entre el fondo del río, por donde navega la barca, y el vidrio es de 2 m. ¿Qué radio de curvatura tendrán las caras de la lente para que haga el papel de lupa de 3 aumentos al mirar el fondo del río?

Comentado por sleepylavoisier en http://docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=6098&p=27514#p27441
Es un ejercicio resuelto en las referencias asociadas a esta imagen



Imágenes tomadas de
http://www.fisicaenppt.esy.es/Problemas_de_%C3%93ptica_Geom%C3%A9trica.pdf#page=43
Problemas de óptica geométrica, Julio V. Santos
Problema 35



El eje óptico sería vertical, y el sentido de propagación de rayos sería de abajo hacia arriba, pero lo consideramos de izquierda a derecha. Utilizando el convenio de signos DIN 1335, s=-2 m.

Hay varios sistemas ópticos, lo podemos plantear de dos maneras:

Planteamiento 1. Dos dioptrios esféricos

Referencias
En las referencias asociadas a las imágenes de Julio V. Santos está resuelto como 2 dioptrios.
http://www.ub.edu/javaoptics/teoria/textguia_es.pdf
Aumento lateral, página 10, ecuación 1.7

Para cada dioptrio se puede plantear el aumento lateral $\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$

La combinación de los dos dioptrios tiene como aumento total la multiplicación de ambos aumentos

$$\beta' = \beta'_1 \cdot \beta'_2$$

$$\beta'_1 = \frac{n_1}{n_2'}\frac{s_1'}{s_1} = \frac{1{,}33}{1{,}41}\cdot\frac{s'_1}{(-2)} = \frac{-1{,}33}{2{,}82}s'_1$$

La imagen del primero es el objeto del segundo: $s'_1 = s_2$

$$\beta'_2 = \frac{n_2}{n_3'}\frac{s_2'}{s_2} = \frac{1{,}41}{1}\cdot\frac{s'_2}{s'_1} = 1{,}41\frac{s'_2}{s'_1}$$

Combinando ambas

$\beta'=\frac{-1,33}{2,82}\cancel{s'_1}1,41\frac{s'_2}{\cancel{s'_1}}=-0,665s'_2$

Como el aumento total es 3

$3=-0,665s'_2\Rightarrow s'_2=-4,511m$

Planteamos la invariante de Abbe en cada dioptrio $\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$

Ambos tienen mismo radio pero signo distinto

Primer dioptrio: $r_1=r$ (positivo) $\frac{1,41}{s'_1}-\frac{1,33}{-2}=\frac{1,41-1,33}{r}$

Segundo dioptrio: $r_2=-r$ (negativo) $\frac{1}{-4,511}-\frac{1,41}{s_2}=\frac{1-1,41}{-r}$

La imagen del primero es el objeto del segundo: $s'_1=s_2$, por lo que sumando

$$\frac{-1,33}{-2}+\frac{1}{-4,511}=\frac{0,08+0,41}{r}\Rightarrow r=\frac{0,49}{\frac{-1,33}{-2}+\frac{1}{-4,511}}=1,105m$$

Planteamiento 2. Utilizamos superposición de efectos.

Referencias:

Ejemplo óptica geométrica con superposición elementos: 2000 Madrid X1

https://ocw.upc.edu/curs_publicat/370504/2011/1

PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL, Unidad 9:9.2 Asociación de lentes delgadas y dioptrios planos, Jaume Escofet, página 8 "Caso 1: Dioptrio plano o asociación de dioptrios planos situados delante de la lente L."

PROBLEMAS DE ÓPTICA GEOMÉTRICA E INSTRUMENTAL, Unidad 8: 8.3 Asociación de lente delgada y dioptrios planos, Jaume Escofet

Comentario para ejercicio 1 que refleja idea superposición:

1. Se determina, en primer lugar, la imagen que forma el conjunto dioptrios planos. A continuación, considerando la imagen anterior domo el objeto para la lente L, se determina la imagen que forma dicha lente

En la superposición usamos subíndice 1 para el primer efecto y 2 para el segundo.
Planteamos primero el efecto del dioptrio entre agua (n) y aire (n'), pero es importante tener presente que no es la superposición con un dioptrio plano que tendría aumento 1, sino con un dioptrio esférico cuyo radio de curvatura coincide con el de la lente, en este caso dioptrio convexo con r positivo.

$$\frac{n'}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}\quad\rightarrow$$

$$\frac{1}{s_1'}-\frac{1,33}{-2}=\frac{1-1,33}{r}\Rightarrow\frac{1}{s_1'}=\frac{-1,33}{2}-\frac{0,33}{r}\Rightarrow s_1'=\frac{1}{\frac{1,33}{-2}-\frac{0,33}{r}}=\frac{-2r}{1,33r+0,66}$$

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}\quad\rightarrow\quad A_1=\frac{n_1s'_1}{n_2s_1}=\frac{1,33}{1\cdot(-2)}s_1'=\frac{1,33\cdot(-2r)}{-2\cdot(1,33r+0,66)}=\frac{1,33r}{1,33r+0,66}$$

Luego superponemos el efecto de la lente, tomando la posición de la imagen del dioptrio como objeto de la lente: la imagen del primero es el objeto del segundo: $s'_1=s_2$

$$A=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\quad\rightarrow\quad A_2=\frac{s_2'}{s_2}$$

Sabemos que el aumento total es 3

$A=A_1 \cdot A_2=3 \Rightarrow \frac{1{,}33\, \cancel{s_1}'}{-2} \frac{s_2'}{\cancel{s_1}'}=3 \Rightarrow s_2'=\frac{-2 \cdot 3}{1{,}33}=-4{,}51\, m$

Para calcular el radio usamos la fórmula del constructor de lentes, y debemos asumir un medio en el que está inmersa, n_L es el índice relativo al medio; el efecto aire-agua ya lo hemos tenido en cuenta al tratar el dioptrio plano, y surge la duda de si usar sobre aire o sobre agua. Tomamos inmerso en aire.

$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=(n_L-1)(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$

Como el radio de curvatura es el mismo en ambas caras, $r=R_1=-R_2$

$\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=(1{,}41-1)\frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s_2'}=\frac{1}{s_2}+\frac{0{,}82}{r}$

Como $s'_1=s_2$, planteamos $1/s_2 = 1/s_1'$, y usando el valor de s_2' ya calculado

$\frac{1}{-4{,}51}=(\frac{-1{,}33}{2}-\frac{0{,}33}{r})+\frac{0{,}82}{r}=\frac{-1{,}33}{2}+\frac{0{,}49}{r} \Rightarrow r=\frac{0{,}49}{\frac{1}{-4{,}51}+\frac{1{,}33}{2}}=1{,}105\, m$

Mirando referencias, otra opción sería no ambiar la posición del objeto, sino la posición del foco de la lente. Una lente inmersa en dos medios distintos tiene distancias focales distintas, no se usaría la ecuación del constructor de lentes habitual.