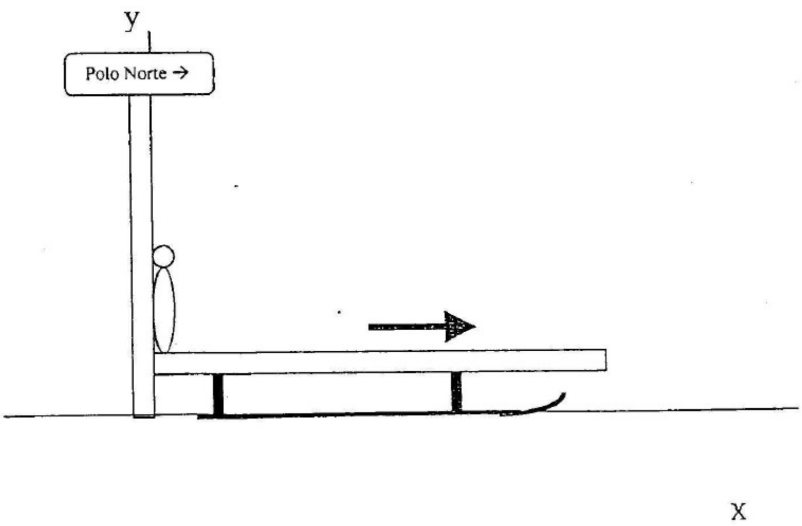
1. Problemas relacionados con el temario de ingreso

3. Un trineo homogéneo de longitud L=6 m se mueve con velocidad constante v=10 m/s tal y como muestra la figura. La masa del trineo es m_T=50 kg y la de la persona que va montado m_P=70 kg. Tomemos como sistema de referencia para estudiar el movimiento el que se indica en la figura y el origen de tiempo en el instante en que la parte final del trineo coincide con el cartel. Calcule:
a) Posición del centro de masa del sistema formado por el trineo y la persona para cualquier instante y a los 10 s.
b) Demuestre que el centro de masa del trineo se mueve también a la velocidad v y con la misma dirección y sentido.
c) Cuando han pasado 10 s la persona comienza a caminar en la misma dirección del movimiento con velocidad 2 m/s respecto al trineo. Encuentre, despreciando el rozamiento la velocidad con que ahora se mueve el trineo.
d) Energías cinéticas del sistema formado por el trineo y la persona respecto al sistema de referencia situado en su centro de masa, cuando la persona se está moviendo.



Referencias
Cataluña 1994-A2
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Definici%C3%B3n_y_propiedades_de_un_sistema_de_part%C3%ADculas#Energ.C3.ADa_cin.C3.A9tica

a) Tomamos eje x positivo hacia la derecha del diagrama (eje x ya está indicado en enunciado pero sin indicar explícitamente el sentido)
Al ser el trineo homogéneo y de 6 m de longitud su centro de masas está en el centro, por lo que en t=0 tenemos x_T=L/2 (expresada en m)
Consideramos a la persona una masa puntual situada en el borde del trineo, por lo que mientras no se desplace $x_P=x_T-L/2$. Como en diagrama inicialmente x_P=0 (persona en el borde y x_P=vt siendo x_P=0 para t=0), tomamos $x_T=x_P+L/2$.

La posición del centro de masas es $x_{CM}=\frac{x_T\cdot m_T+x_P\cdot m_P}{m_T+m_P}$

Como el trineo describe un MRU, $x_T=x_0+vt$, y en este caso x_0=0.

Sustituyendo $x_{CM}=\frac{\left(x_P+\frac{L}{2}\right)\cdot m_T+x_P\cdot m_P}{m_T+m_P}=x_P+\frac{\frac{L}{2}m_T}{m_T+m_P}=vt+\frac{\frac{L}{2}m_T}{m_T+m_P}$

Numéricamente $x_{CM}=10t+\frac{3\cdot 50}{50+70}=10t+1{,}25[x\,en\,m, t\,en\,s]$

Para t=10 s $x_{CM}=10\cdot 10+1{,}25=101{,}25\,m$

b) Enunciado indica "centro de masa del trineo", no del sistema, por lo que planteamos que el dato del enunciado v sea la velocidad del extremo del trineo (extremo inicial que sí sabemos que tiene x=vt), y planteamos la posición del centro de masas del trineo aislado siendo homogéneo, con sección S y con longitud L que no varía (es rígido).

$$\rho=\frac{M}{S\cdot L}\Rightarrow dm=\rho S\,dx\Rightarrow x_{CM}=\int_{vt}^{vt+L}\frac{\rho}{M}x\,dx=\frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{vt}^{vt+L}=\frac{1}{2L}\left((vt+L)^2-(vt)^2\right)=\frac{1}{2L}(L^2+2vLt)$$

$$x_{CM}=\frac{1}{2}(L+2vt)=\frac{L}{2}+vt$$

Obtenemos la velocidad del centro de masas derivando $v_{CM}=\frac{d\,x_{CM}}{dt}=v$

c) Planteamos la conservación del momento lineal; considerando el sistema trineo-persona aislado, su momento lineal no varía, por lo que si la persona se desplaza hacia la derecha/aumenta su velocidad, el trineo se desplaza hacia la izquierda/disminuye su velocidad. El centro de masas del sistema sigue teniendo el mismo movimiento descrito en a).

Tomamos velocidades respecto sistema de referencia ligado al suelo.

$$p_{antes}=m_{P.}v_P+m_T\cdot v_T=(m_P+m_T)\cdot v=(50+70)\cdot 10=1200\,kg\cdot m/s$$

$$p_{después}=m_{P.}v_P+m_T\cdot v_T=m_P\cdot v_P'+m_T\cdot v_T'\Rightarrow 1200=70\cdot v_P'+50\cdot v_T'$$

Para relacionar velocidades usamos la frase del enunciado "velocidad 2 m/s respecto al trineo", que implica $v_P'=v_T'+2$

$$1200=70\cdot(v_T'+2)+50\cdot v_T'\Rightarrow 1200-70\cdot 2=(70+50)v_T'\Rightarrow v_T'=\frac{1200-140}{120}=\frac{53}{6}\approx 8{,}33\,m/s$$

Aunque no se pide explícitamente calculamos $v_P'=\frac{53}{6}+2=\frac{65}{6}\approx 10{,}83\,m/s$, lo que valida que la persona va más deprisa y el trineo más despacio que antes.

>No se necesita el dato de que el movimiento se inicia 10 s después, si acaso simplemente para saber que se ha recorrido poca distancia y se puede asumir movimiento rectilíneo; ya que enunciado cita Polo Norte, si fueran muchos kilómetros se estaría describiendo un movimiento curvilíneo sobre un meridiano.

d) La energía cinética respecto del centro de masa del sistema es la asociada a los movimientos de trineo y persona respecto del centro de masas, que usando adición de velocidades medidas respecto del sistema de referencia ligado al suelo y sabiendo que la velocidad del centro de masas es de 10 m/s son $v_{PCM}=\frac{65}{6}-10=\frac{5}{6}\approx 0{,}83\,m/s$ $v_{TCM}=\frac{53}{6}-10=\frac{-7}{6}\approx -1{,}17\,m/s$

$$E_{c\,total\,respecto\,CM}=E_{c\,T\,CM}+E_{c\,P\,CM}=\frac{1}{2}m_T v_{TCM}^2+\frac{1}{2}m_P v_{PCM}^2$$

$$E_{c\,total\,respecto\,CM}=\frac{1}{2}50\left(\frac{-7}{6}\right)^2+\frac{1}{2}70\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{175}{3}\approx 58{,}3\,J$$

No se pide, pero planteamos la energía total, de dos maneras:

1. $E_{c\,total}=E_{c\,traslación}+E_{c\,rotación}$ *donde el término rotación (a veces se usa orbital) es el asociado al movimiento respecto al centro de masas* $E_{c\,traslación}=\frac{1}{2}M_{total}v_{CM}^2=\frac{1}{2}(50+70)10^2=6000\,J$

Por lo tanto $E_{c\,total}=6000+\frac{175}{3}=\frac{18175}{3}\approx 6058{,}3\,J$

2. $E_{c\,total}=E_{cT}+E_{cP}=\frac{1}{2}50\cdot\left(\frac{53}{6}\right)^2+\frac{1}{2}70\cdot\left(\frac{65}{6}\right)^2=\frac{18175}{3}\approx 6058{,}3\,J$