enrique@fiquipedia.es Revisado 31 julio 2016

Física

2.- La densidad de un planeta esférico puede suponerse que viene dada por C/r para r<R siendo R su radio. La masa del planeta es M.

a) Determine C.

b) Encuentre las expresiones para el campo gravitatorio para radios mayores y menores que R.

c) Suponiendo M = 3·10^24 kg y R= 6000 km calcular los valores numéricos del campo en la superficie del planeta.

d) En este planeta se hace un agujero desde su superficie hacia el centro de profundidad L, desde la superficie se deja caer una pequeña masa m, determine la velocidad al llegar al fondo para L = 0'1 R

a)

$$M=\int_0^R \rho\, dV\ ;\ V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV=4\pi r^2 dr$$

$$M=\int_0^R \frac{C}{\cancel{r}} 4\pi r^{\cancel{2}} dr=4\pi C\frac{R^2}{2}\Rightarrow M=2\pi C R^2\Rightarrow C=\frac{M}{2\pi R^2}$$

No damos C como valor numérico, los datos están en apartado c.

b) Utilizamos la ley de Gauss para campo gravitatorio $\oint_S \vec{g}\cdot\vec{ds}=-4\pi G M_{\text{int}}$

Como el campo es un vector, expresamos resultado vectorialmente

Por simetría tomamos superficies esféricas concéntricas con el planeta, de modo que el vector campo siempre es perpendicular a la superficie

Si r>R: $-g\cancel{4\pi} r^2=-\cancel{4\pi} G M\Rightarrow g=\frac{GM}{r^2}\Rightarrow \vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

Si r<R: Para calcular masa interna en la expresión con Gauss, reutilizamos resultado de apartado a, donde ya realizamos la integral, usando r en lugar de para R, por lo que $M_{\text{int}}=2\pi C r^2$

$$-g\cancel{4\pi}\cancel{r^2}=-\cancel{4\pi} G 2\pi C \cancel{r^2}\Rightarrow g=2\pi G C=\cancel{2\pi} G\frac{M}{\cancel{2\pi} R^2}=\frac{GM}{R^2}$$

$$\vec{g}=-g\vec{u}_r=-2\pi GC\vec{u}_r=\frac{-GM}{R^2}\vec{u}_r$$

No damos valores numéricos, se piden en apartado c.

c) $C=\frac{3\cdot 10^{24}}{2\pi(6000\cdot 10^3)^2}=1{,}326\cdot 10^{10}\frac{kg}{m^2}$

$$g_{superficie}=\frac{GM}{R^2}=2\pi G C=2\cdot\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}326\cdot 10^{10}=5{,}56\frac{N}{kg}\text{ ó }\frac{m}{s^2}$$

d) Como en el interior del planeta g tiene módulo constante, F=mg es constante, y la expresión de la energía potencial (que se podría obtener integrando a partir de la definición y tomando una referencia $E_p(pto)=\int_{pto}^{ref}\vec{F}\cdot\vec{dx}$) se puede plantear excepcionalmente E_p=mgh, tomando E_p=0 para h=0 en el fondo del agujero.

Planteando la conservación de energía mecánica en superficie y en el fondo

$$\cancel{m} gh=\frac{1}{2}\cancel{m} v^2\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

Al ser el campo / fuerza / aceleración constante también se puede plantear como MRUA

$$v^2-\cancel{v_0^2}=2as\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

$$v=\sqrt{2\cdot 5{,}56\cdot 0{,}1\cdot 6\cdot 10^6}=2{,}58\cdot 10^3 m/s$$