enrique@fiquipedia.es Revisado 6 mayo 2016

FÍSICA

2.- Disponse dun cilindro de 20 cm de diámetro cun pistón libre de rozamentos e transmisor perfecto de calor, unido a un vástago. Ponse o cilindro vertical, co vástago cara arriba e suxeitase este de maneira que o pistón situado no centro do cilindro divide ao mesmo en dous volumes iguais de 20 L cadanseu, cheos de ar, considerado un gas perfecto, a presión e temperatura ambientes, que se atopan a 1 atm e 25º C. O cilindro é estanco por ámbalas partes e termicamente illado do exterior. Apóiase un peso de 500 kg no vástago e se libera o conxunto pistón-vástago-peso, que se despraza cara abaixo para logo volver cara arriba, orixinándose un movemento de vaivén ata que finalmente, por fricción co ar interior, o conxunto estabilízase en certa posición. Determinar:
a) As variables termodinámicas -P, V e T- do ar nos dous compartimentos cando se estabiliza e o traballo recibido polo conxunto do ar no cilindro.
b) ¿Hai traballo non útil?. ¿Cal é o incremento total de entropía no universo?.
Datos: R= 0,287 kJ/kg·K. Cp= 1,0043 kJ/kg·K. Cv= 0,7165 kJ/kg·K.

2. Se dispone de un cilindro de 20 cm de diámetro libre de rozamientos y transmisor perfecto de calor, unido a una barra. Se pone el cilindro vertical, con la barra hacia arriba y se sujeta de manera que el pistón situado en el centro del cilindro divide el mismo en dos volúmenes iguales de 20 L cada uno, llenos de aire, considerado un gas ideal, a presión y temperatura ambiente, que son 1 atm y 25 ºC. El cilindro está sellado en ambos lados y térmicamente aislado del exterior. Se apoya un peso de 500 kg en el eje y se libera el conjunto pistón-vástago-peso, que se desplaza hacia abajo para luego volver hacia arriba, originando un movimiento de vaivén hasta que finalmente, por la fricción con el aire interior, el conjunto se estabiliza en cierta posición. Determinar:
a) Las variables termodinámicas P, V y T del aire en los dos compartimentos cuando se estabiliza y el trabajo recibido por todo el aire en el cilindro.
b) ¿Hay trabajo no útil?. ¿Cuál es el aumento total de la entropía en el universo?.
Datos: R = 0,287 kJ/kg·K. C_p = 1,0043 kJ/kg·K. C_v = 0,7165 kJ/kg·K.

Referencias:
http://forum.lawebdefisica.com/threads/34882-Problema-de-piston-que-se-desplaza
http://opsfisquim.blogspot.com.es/2015/06/recopilacion-de-problemas-del-foro.html

http://laplace.us.es/wiki/index.php/Cálculos_de_entropía_(GIE)
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Segundo_Principio_de_la_Termodin%C3%A1mica#Trabajo_.C3.BAtil_total

Problemas donde se cita variación entropía universo: 1994 Cataluña B3, 2000 Cataluña A2, 2000 Cataluña C3, 2001 Cataluña A3.

En general en problemas de termodinámica debemos comenzar dejando claro el convenio de signos usado: se utiliza el convenio IUPAC según el cual la primera ley es ΔU=Q+W, Q>0 y W>0 son aportados al sistema (no se utiliza el convenio Clausius según el cual es ΔU=Q-W)

Describimos la **situación inicial, antes de poner el peso**.
Usamos subíndice i para inicial, 1 para compartimento por debajo del pistón y 2 para compartimento por encima del pistón.
Asumimos que el volumen de la barra/vástago es despreciable y no interviene térmicamente.
$P_{1i}=P_{2i}=1$ atm
$V_{1i}=V_{2i}=20$ L

$T_{1i}=T_{2i}=T_i=273+25=298$ K
Convertimos el dato de R dado a atm·L, calculando el factor de conversión entre J =Pa·m^3 y atm·L

$$\frac{101325\,Pa}{1\,atm}\frac{1\,m^3}{10^3\,L}=101{,}325\frac{J}{atm\cdot L}$$

$$R=0{,}287\cdot 10^3\frac{\cancel{J}}{kg\cdot K}\cdot\frac{1\,atm\cdot L}{101{,}325\,\cancel{J}}=2{,}83247\frac{atm\cdot L}{kg\cdot K}$$ (Usando 3 cifras: 2,83)

>Conociendo que R=0,082 atm·L/K·mol, podemos conocer la masa molar media, que son (0,082/2,83)·1000 = 28,95 g/mol gas

$$m_{1i}=m_{2i}=\frac{PV}{RT}=\frac{1\cdot 20}{2{,}83\cdot 298}=0{,}0237\,kg$$

Conociendo el volumen inicial de cada compartimento y su sección, podemos calcular la altura inicial de cada compartimento
Si el diámetro son 20 cm, el radio del pistón es 0,1 m.

$$V=S\cdot h\Rightarrow 20\cdot 10^{-3}=\pi\cdot 0{,}1^2\cdot h\Rightarrow h=\frac{20\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot 0{,}1^2}=0{,}63662\,m$$

El cilindro en total tiene 2·0,63662=1,27324 m de altura.

Describimos la **situación final, una vez se ha estabilizado con el peso encima**.
Usamos subíndice f para final.
No se proporciona g como dato, usamos g=9,8 m/s^2
$V_{1f}+V_{2f}=40$ L
$T_{1f}=T_{2f}=T_f$ (interconectados por un pistón que es transmisor de calor)
$m_{1f}=m_{2f}=m=0{,}0237$ kg

$$P_{1f}(atm)=1+P_{peso}(atm)=1+\frac{m\cdot g}{S}(atm)=1+\frac{500\cdot 9{,}8}{\pi\,0{,}1^2}\cdot\frac{1}{101{,}325}=1540\,atm$$

Al mismo tiempo

$$P_{1f}=\frac{m_{1f}RT_{1f}}{V_{1f}}=\frac{m\,RT_f}{V_{1f}}\Rightarrow\frac{T_f}{V_{1f}}=\frac{P_{1f}}{mR}=\frac{1540}{0{,}0237\cdot 2{,}83}=22961\frac{K}{L}$$

La presión final del compartimento 2 estará asociada a su volumen (el resto hasta el volumen total de ambos de 40 L), a su temperatura final (la misma que el 1 porque ambos están interconectados por un pistón que es transmisor de calor) y a la cantidad de gas (la misma que inicialmente).

$$P_{2f}=\frac{m_{2f}RT_{2f}}{V_{2f}}=\frac{m\,RT_f}{40-V_{1f}}$$

Combinando con lo anterior

$$P_{2f}=\frac{0{,}0237\cdot 2{,}83\cdot 22961\cdot V_1 f}{40-V_{1f}}=1540\frac{V_{1f}}{40-V_{1f}}$$

Describimos el proceso entre esas dos situaciones: el cilindro está aislado térmicamente del exterior y no intercambia calor, por lo que se puede pensar en un proceso adiabático, pero el proceso de cada compartimento es separado y no podemos considerar solamente una suma de dos procesos adiabáticos ya que aunque no haya aporte de calor al sistema global de los dos cilindros, sí hay aporte de trabajo al sistema al colocar la masa, y hay intercambio de calor entre los dos compartimentos. Pero sí podemos considerar el proceso como una suma de varios procesos, y se pueden hacer varios planteamientos: como conocemos la presión final del compartimento 1, se puede plantear empezar por un proceso que la consiga como primer paso, pero si planteamos una compresión adiabática de 1 la energía la tiene que aportar 2, y quizá no sea posible que aporte tanta energía (la compresión es debida al peso de una masa de 500 kg que tendrá un valor importante), así que comenzamos con la energía aportada por el pistón que desciende.

A. Aporte de energía asociada al trabajo de desplazamiento de la masa que desciende / a su pérdida de energía potencial. Se puede pensar en la equivalente trabajo-calor de Joule.
Lo tenemos que asignar a un sistema o parte, lo consideramos aportado inicialmente al sistema y ambos aumentan de temperatura ($T_{1A}=T_{2A}$), manteniéndose los volúmenes iguales ($V_{1A}=V_{2A}$=20 L), por lo que su presión aumentará al igual que su temperatura.
B. Transformación adiabática de cada compartimento, el 1 se comprime hasta la **presión final** y se calienta, al tiempo que el 2 se expande y se enfría. Como ambos tienen la misma masa y el mismo calor a volumen constante, el incremento de temperatura es el mismo para ambos pero en sentidos opuestos.
C. Equilibrio térmico entre compartimento 1 y 2 sin modificar presión (el 1 estará más caliente y cederá calor al 2), de modo que el volumen de 1 desciende y el de 2 aumenta, hasta llegar al **volumen final**.

Planteamos las ecuaciones asociadas a cada uno de los tres subprocesos, para conseguir relacionar situación inicial y final y obtener los valores solicitados:
A. La energía aportada por el bloque en su descenso es Mgh, siendo M=500 kg y h la altura que ha bajado hasta la posición final, h=V/S. Planteando el primer principio de la termodinámica $\Delta U=W$ y teniendo en cuenta que la variación de energía interna es una función de estado que depende únicamente de la temperatura y que podemos calcular con Cv, en este caso lo hacemos con masas $\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2=2m\cdot C_v\cdot\Delta T$

$$2\cdot m\cdot C_v\cdot(T_A-T_i)=Mgh$$
$$2\cdot 0{,}0237\cdot 0{,}7165\cdot 10^3\cdot(T_A-298)=500\cdot 9{,}8\cdot h$$
$$T_A=298+144{,}278\,h$$

Como hemos mantenido volúmenes, podemos relacionar presiones, que serán las mismas en ambos compartimentos

$$P_{1A}=P_{2A}=P_A=\frac{mRT_A}{V_A}=\frac{0{,}0237\cdot 2{,}83\cdot(298+144{,}278\,h)}{20}=1+0{,}4838\,h$$

Viendo que hemos visto que la presión final de 1 es de 1540 atm, podemos pensar que no cuadra con esta expresión, pero esta expresión está asociada a que ambos compartimentos tengan la misma presión, mientras que en la situación final el compartimento 1 tiene una presión mucho mayor que el 2.

B. Podemos calcular el coeficiente adiabático con los datos $\gamma=\frac{c_p}{c_v}=\frac{1{,}0043}{0{,}7165}=1{,}402$

Al ser adiabático con mismas masas y Cv ya habíamos indicado que la variación de temperatura es la misma pero sentidos opuestos, lo validamos

$$\Delta U=0\Rightarrow\Delta U_{1AB}=-\Delta U_{2AB}\Rightarrow\cancel{m\cdot C_v}\cdot\Delta T_{1AB}=-\cancel{m\cdot C_v}\cdot\Delta T_{2AB}\Rightarrow\Delta T_{1AB}=-\Delta T_{2AB}$$
$$T_{1B}-T_A=-(T_{2B}-T_A)\Rightarrow T_{1B}-T_A=-T_{2B}+T_A$$
$$T_{1B}=2T_A-T_{2B}=596+288{,}556\,h-T_{2B}$$

Al ser adiabático podemos relacionar presiones y temperaturas para cada compartimento

$$P_{1A}^{1-\gamma}T_{1A}^{\gamma}=P_{1B}^{1-\gamma}T_{1B}^{\gamma}$$
$$P_{2A}^{1-\gamma}T_{2A}^{\gamma}=P_{2B}^{1-\gamma}T_{2B}^{\gamma}$$

Si igualamos ambas dado que $T_{1A}=T_{2A}=T_A$ y $P_{1A}=P_{2A}=P_A$

$$P_{1B}^{1-\gamma}T_{1B}^{\gamma}=P_{2B}^{1-\gamma}T_{2B}^{\gamma}$$
$$\left(\frac{T_{1B}}{T_{2B}}\right)^{\gamma}=\left(\frac{P_{2B}}{P_{1B}}\right)^{1-\gamma}\Rightarrow\frac{596+288{,}556\,h-T_{2B}}{T_{2B}}=\left(\frac{P_{2B}}{1540}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

C. Como es un sistema adiabático, de manera similar a proceso B, pero planteando que es un equilibrio térmico y que $T_{1C}=T_{2C}$

$$\Delta U=0\Rightarrow\Delta U_{1BC}=-\Delta U_{2BC}\Rightarrow\cancel{m\cdot C_v}\cdot\Delta T_{1BC}=-\cancel{m\cdot C_v}\cdot\Delta T_{2BC}\Rightarrow\Delta T_{1BC}=-\Delta T_{2BC}$$
$$T_{1C}-T_{1B}=-(T_{2C}-T_{2B})\Rightarrow T_{1C}-T_{1B}=-T_{2C}+T_{2B}$$
$$T_{1C}+T_{2C}=T_{1B}+T_{2B}$$
$$2T_C=596+288{,}556h$$
$$T_C=298+144{,}278h$$

Vemos que $T_A=T_C$, resultado que ya sabemos la energía interna es una función de estado que depende de la temperatura, y no hay más aporte de energía interna que el realizado en A.

Finalmente no utilizamos las expresiones de subproceso B ni el coeficiente adiabático, y en este caso hubiera bastado con saber que la temperatura del subproceso A y del B es la misma para el planteamiento final.

que es, conociendo que la situación final P_{1C}=1540 atm, relacionar con volumen y temperatura. Como sabemos que compartimento 1 se comprime e inicialmente tiene 0,63662 m y en situación final ha descendido h, su altura final es 0,63662-h.

$$T_C=\frac{P_{1C}\cdot V_{1C}}{mR}\Rightarrow 298+144{,}278h=\frac{1540\cdot\pi\cdot 0{,}1^2\cdot(0{,}63662-h)\cdot 10^3}{0{,}0237\cdot 2{,}83}$$
$$298+144{,}278h=721333(0{,}63662-h)$$
$$298-459215=h(-721333-144{,}278)\Rightarrow h=\frac{-458917}{-721477{,}278}=0{,}63608\,m$$

Vemos que h es casi la altura total, lo que implica que el cilindro desciende mucho; es razonable viendo que es una masa elevada.

Calculamos temperatura final

$$T_C=298+144{,}278\cdot 0{,}63608=389{,}77\,K$$

Calculamos volumen final en cada compartimento

$$V_{1f}=\pi\cdot 0{,}1^2\cdot(0{,}63662-0{,}63608)\cdot 10^3=0{,}017\,L$$
$$V_{2f}=40-V_{1f}=39{,}983\,L$$

Validamos con expresiones anteriores

$$\frac{T_{1f}}{V_{1f}}=22945\Rightarrow V_{1f}=\frac{389{,}77}{22961}=0{,}017\,L$$

La presión final en el compartimento 2 es

$$P_{2f}=1540\frac{0{,}017}{40-0{,}017}=0{,}655\,atm$$

Respondiendo explícitamente a lo preguntado:

-Valores finales P, V, T :

Compartimento	P (atm)	V (L)	T (K)
1 (inferior)	1540	0,017	389,77
2 (superior)	0,655	39,983	389,77

-Trabajo recibido por todo el aire en el cilindro

El trabajo está asociado al descenso de la masa, comentado en subproceso A, que podemos calcular de dos maneras

$$W=M\cdot g\cdot h=500\cdot 9{,}8\cdot 0{,}63608=3117\,J$$
$$W=2\cdot m\cdot C_v\cdot(T_f-T_i)=2\cdot 0{,}0237\cdot 0{,}7165\cdot 10^3\cdot(389{,}77-298)=3117\,J$$

b) Es un proceso real e irreversible, luego el aumento de entropía del universo es positivo. El aumento total de entropía del universo es la suma de variación de entropía del sistema y del exterior; calculamos la variación de entropía del sistema.

Podemos calcular la variación de entropía, como es una función de estado, podemos plantearlo como suma de subprocesos, no necesariamente los descritos en apartado anterior.
Planteamos la variación de entropía de cada compartimento por separado

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2$$

En general para cada compartimento

$$\Delta S=\Delta S_A+\Delta S_B+\Delta S_C=mC_v\int\frac{dT}{T}+0+mC_P\int\frac{dT}{T}=mC_v\ln(\frac{T_A}{T_i})+mC_p\ln(\frac{T_A}{T_B})$$

Necesitamos conocer las temperaturas del estado B, usamos las ecuaciones planteadas

$$T_{1B}=2\cdot 389{,}77-T_{2B}\Rightarrow T_{1B}=779{,}54-T_{2B}$$

$$\frac{T_{1B}}{T_{2B}}=\left(\frac{0{,}655}{1540}\right)^{\frac{1-1{,}402}{1{,}402}}=0{,}108\Rightarrow T_{1B}=0{,}108\,T_{2B}$$

Combinando ambas

$$779{,}54-T_{2B}=0{,}108\,T_{2B}\Rightarrow T_{2B}=\frac{779{,}54}{1{,}108}=703{,}56\,K$$

$$T_{2B}=779{,}54-T_{1B}=779{,}54-703{,}56=75{,}98\,K$$

Sustituyendo para cada compartimento

$$\Delta S_1=0{,}0237\cdot 0{,}7165\cdot 10^3\cdot\ln(\frac{389{,}77}{298})+0{,}237\cdot 1{,}0043\cdot 10^3\cdot\ln(\frac{389{,}77}{703{,}56})=-136\,J/K$$

Variación negativa, el sistema se comprime

$$\Delta S_2=0{,}0237\cdot 0{,}7165\cdot 10^3\cdot\ln(\frac{389{,}77}{298})+0{,}237\cdot 1{,}0043\cdot 10^3\cdot\ln(\frac{389{,}77}{75{,}98})=393\,J/K$$

La variación total

$$\Delta S=\Delta S_1+\Delta S_2=-136+393=257\,J/K$$

Respecto a trabajo útil, mirando en referencias sobre su significado
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Segundo_Principio_de_la_Termodin%C3%A1mica#Trabajo_.C3.BAtil_total
al ser en este caso un sistema adiabático, el único intercambio de energía con el exterior ha sido el aporte de energía de la masa al descender, no hay trabajo útil.