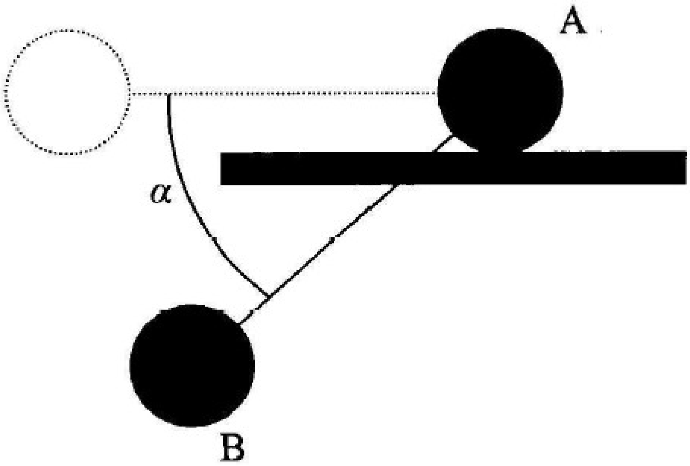
PROCEDIMIENTOS SELECTIVOS PARA EL ACCESO E INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA. AÑO 2006

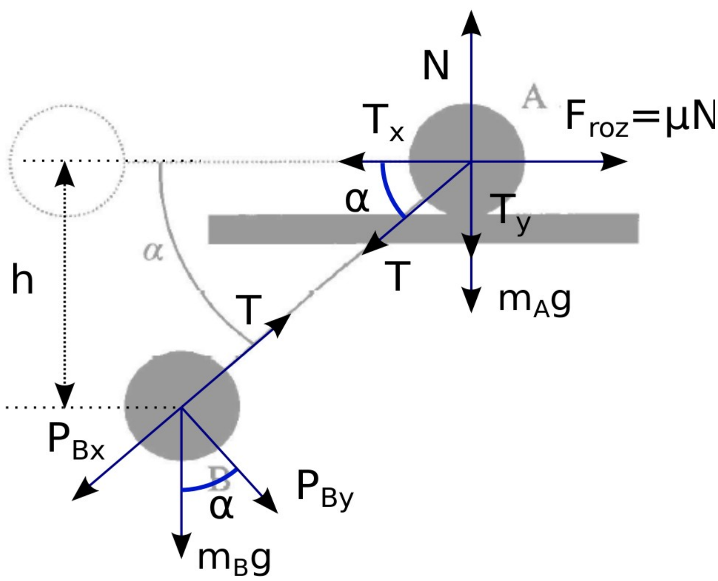
EJERCICIO PRÁCTICO CORRESPONDIENTE A LA PRIMERA PRUEBA:

1.- Dos cuerpos A y B de masa m están unidos por un hilo inextensible de longitud L y masa despreciable de tal manera que el cuerpo A puede deslizar por una superficie horizontal. Si en el instante inicial α=0. Hallar el coeficiente de rozamiento mínimo entre la superficie horizontal y el cuerpo A para que éste no se mueva.



Explíquense los fundamentos teóricos en los que se basa el procedimiento del ejercicio.

Realizamos una representación de todas las fuerzas que actúan sobre ambos cuerpos en una posición genérica teniendo el ángulo α un valor cualquiera, realizando una elección de sistema de referencia: eje x horizontal y eje y vertical en masa A, y eje x en dirección y sentido tensión y eje y perpendicular en masa B. Para fijar el sentido de la fuerza de rozamiento nos basamos en que siempre se opone al movimiento o al posible movimiento, que en el diagrama sería hacia la izquierda, debido a la componente de la tensión que tiraría del cuerpo A.



Al estar unidos por un hilo inextensible y sin masa la tensión en ambos extremos en la misma.

El objetivo es expresar el coeficiente de rozamiento en función del ángulo y luego derivar. Se podría plantear calcular el valor de T_x máxima y que éste fija por sí solo el valor de coeficiente de rozamiento mínimo para que esa tensión no desplace el cuerpo A, pero no es correcto, ya que la normal también depende de la T_y y del ángulo

Lo planteamos de manera general con m_A y m_B, aunque en este caso $m_A=m_B=m$

Por conservación de energía (sin pérdidas, tomamos h=0 arriba) $-\cancel{m_B} gh+\frac{1}{2}\cancel{m_B} v^2=0 \Rightarrow v^2=2gh$

Por trigonometría $h=L\cdot sen(\alpha)$

El cuerpo B tiene aceleración centrípeta, siendo la fuerza centrípeta la tensión. El radio de giro es L.

$$T-P_{Bx}=m_B a$$

$$T-m_B g\,sen(\alpha)=m_B\frac{v^2}{L}=m_B 2\frac{g}{\cancel{L}}\cancel{L}\,sen(\alpha)$$

$$T=3m_B g\,sen(\alpha)$$

Aplicamos la 2ª ley de Newton en el cuerpo A para relacionar el coeficiente de rozamiento con la tensión. Como el cuerpo A no se mueve, su aceleración es cero.

Eje y: $N-m_A g-T_y=0 \Rightarrow N=m_A g+T_y$

Eje x: $F_{roz}-T_x=0 \Rightarrow \mu(m_A g+T_y)=T_x$

$$T_x=T\cos(\alpha)=3m_B g\,sen(\alpha)\cos(\alpha)$$

Opción aplicando trigonometría $sen(2\alpha)=2\,sen(\alpha)\cos(\alpha)$ luego $T_x=\frac{3}{2}m_B g\,sen(2\alpha)$

Podemos relacionar $\frac{T_y}{T_x}=tg(\alpha) \Rightarrow T_y=T_x\,tg(\alpha)=3m_B g\,sen^2(\alpha)$

Sustituyendo $\mu=\frac{T_x}{m_A g+T_y}=\frac{3m_B \cancel{g}\,sen(\alpha)\cos(\alpha)}{m_A \cancel{g}+3m_B \cancel{g}\,sen^2(\alpha)}=\frac{3m_B\,sen(\alpha)\cos(\alpha)}{m_A+3m_B\,sen^2(\alpha)}$

Como la expresión es compleja simplificamos usando $m_A=m_B=m$ $\mu=\frac{3\,sen(\alpha)\cos(\alpha)}{1+3\,sen^2(\alpha)}$

Derivamos respecto a α e igualamos a cero.

$$\frac{d\mu}{d\alpha}=\frac{3(\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha))(1+3\,sen^2(\alpha))-3\,sen(\alpha)\cos(\alpha)(6\,sen(\alpha)\cos(\alpha))}{(1+3\,sen^2(\alpha))^2}=0$$

$$3\cos^2(\alpha)+9\,sen^2(\alpha)\cos^2(\alpha)-3\,sen^2(\alpha)-9\,sen^4(\alpha)-18\,sen^2(\alpha)\cos^2(\alpha)=0$$

$$3\cos^2(\alpha)-9\,sen^2(\alpha)\cos^2(\alpha)-3\,sen^2(\alpha)-9\,sen^4(\alpha)=0$$

Buscamos expresión solamente con sen, sustitimos $\cos^2(\alpha)=1-sen^2(\alpha)$

$$3-3\,sen^2(\alpha)-9\,sen^2(\alpha)-9\,sen^4(\alpha)-3\,sen^2(\alpha)-9\,sen^4(\alpha)=0$$

$$3-15\,sen^2(\alpha)=0 \Rightarrow sen^2(\alpha)=\frac{3}{15} \Rightarrow sen(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

"Sustituyendo" el valor del ángulo (usamos valor exacto del seno)

$$\mu\left(\alpha=arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)=\frac{3\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}}{1+3\frac{1}{5}}=\frac{3\cdot\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Para comprobar que es un mínimo:

1. Apaño de andar por casa, comprobamos para un valor de ángulo próximo. Aproximadamente

$$\alpha=arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 26{,}6^o$$

$$\mu(\alpha=26^o)=\frac{3\,sen(26^o)\cos(26^o)}{1+3\,sen^2(26^o)}=0{,}74977$$

$$\mu(\alpha=27^o)=\frac{3\,sen(27^o)\cos(27^o)}{1+3\,sen^2(27^o)}=0{,}7499$$

Los valores laterales son menores, luego es un máximo!
2. Hacemos la segunda derivada … muy largo e inviable en examen, pero a nivel de comprobación http://www.wolframalpha.com/input/?i=second+derivate+%283*sin%28x%29*cos%28x%29%29%2F%281%2B3*sin^2%28x%29%29++for+x%3D1%2Fsqrt%285%29
El valor es negativo, luego es un máximo!
Coincide el cálculo de andar por casa y la comprobación ¿Cómo es posible?
Enunciado pide "*Hallar el coeficiente de rozamiento mínimo entre la superficie horizontal y el cuerpo A para que éste no se mueva.*", pero ese mínimo no es mínimo en el sentido de función siendo el valor más pequeño posible en función del ángulo, sino en el sentido de "al menos", ya que el coeficiente de rozamiento no puede tener un valor más pequeño que ese o el cuerpo A sí se movería.
Fundamentos teóricos:
-2ª Ley de Newton
-Conservación de la energía mecánica
-Aceleración centrípeta