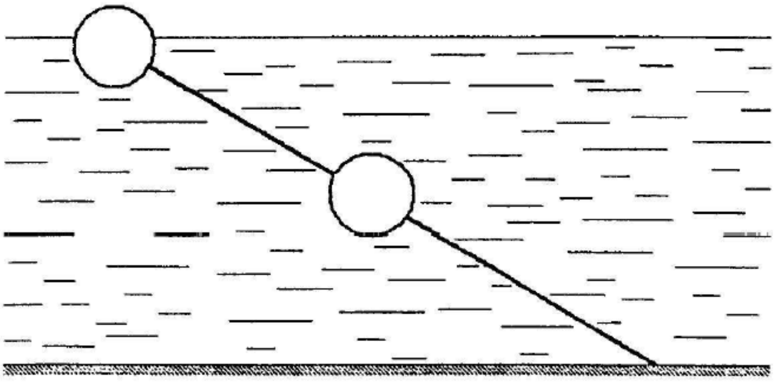
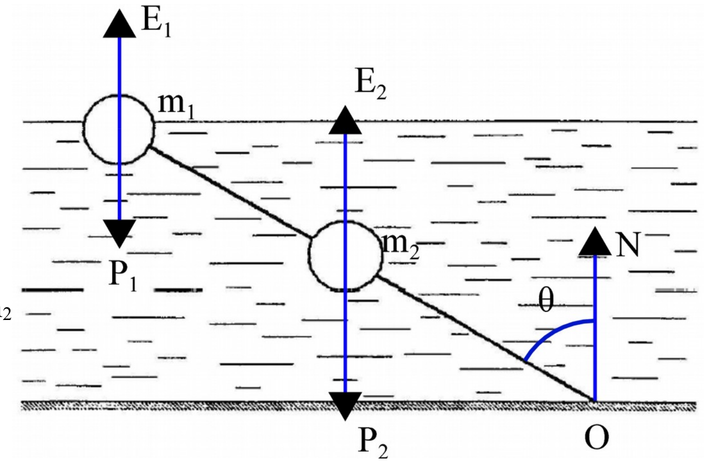
3. Dos bolas de dimensiones iguales, una ligera de masa m_1 y otra pesada de masa m_2, están fijadas sobre una varilla fina, con la particularidad de que la bola pesada está situada en el punto medio de la varilla, mientras que la ligera está colocada en uno de sus extremos, como indica la figura. Cuando el conjunto se sumerge en agua, en un lugar poco profundo, el extremo libre de la varilla se apoya en el fondo, la varilla se dispone de forma oblicua, y del agua sólo sobresale parte de la bola ligera, con ello, el cociente entre el volumen de la parte emergente y el volumen total de la bola es n. ¿Flotará este sistema o se hundirá si lo echamos al agua en un lugar suficientemente profundo? Determinar la condición de flotabilidad en función del valor de las dos masas y de n.
Despreciar la masa de la varilla





La imagen que se proporciona es una situación de equilibrio, que analizamos dinámicamente, representado todas las fuerzas con el objetivo de obtener una relación entre n y las masas. Tomamos x positivas en sentido vertical hacia arriba
Llamamos V al volumen de las esferas, que es igual entre ambas. Llamamos L a la longitud total de la varilla, estando la masa m_2 en el punto central, a L/2 del extremo.

$$n=\frac{V_{emergido}}{V}=\frac{V-V_{desalojado}}{V}=1-\frac{V_{desalojado}}{V}$$

$$V_{desalojado}=V(1-n)$$

Por la definición que se da de n, $0\leq n\leq 1$. Como m_1 es la ligera, $m_1<m_2$, $m_2/m_1>1$
Por definición de empuje, y dado que en masa 2 el volumen desalojado es V, esta misma expresión, multiplicando por densidad del agua y por gravedad la podemos expresar como $E_1=E_2(1-n)$
Despreciamos el empuje asociado a la parte de m_1 que está en aire frente al empuje del agua.
Planteamos el equilibrio de traslación, $F_{total}=0$

$$E_1+E_2+N-P_1-P_2=0$$

$$V(1-n)\cdot\rho_{agua}\cdot g+V\rho_{agua}\cdot g+N-m_1\cdot g-m_2\cdot g=0$$

$$N=g(m_1+m_2-\rho_{agua}V(2-n))$$

Planteamos el equilibrio rotación, $M_{total\,O}=0$ tomamos momento de fuerzas respecto del punto de apoyo de la barra con el fondo.

$$-L\,sen(\theta)E_1-\frac{L}{2}sen(\theta)E_2+L\,sen(\theta)P_1+\frac{L}{2}sen(\theta)P_2=0$$

$$-\cancel{L}\,\cancel{sen(\theta)}V(1-n)\cdot\rho_{agua}\cdot\cancel{g}-\frac{\cancel{L}}{2}\cancel{sen(\theta)}V\rho_{agua}\cdot\cancel{g}+\cancel{L}\,\cancel{sen(\theta)}m_1\cdot\cancel{g}+\frac{\cancel{L}}{2}\cancel{sen(\theta)}m_2\cdot\cancel{g}=0$$

$$-V(1-n)\cdot\rho_{agua}-\frac{V}{2}\rho_{agua}+m_1+\frac{m_2}{2}=0$$
$$m_1+\frac{m_2}{2}=V\rho_{agua}\left(\frac{3}{2}-n\right)$$
$$2m_1+m_2=V\rho_{agua}(3-2n)$$
$$V=\frac{2m_1+m_2}{\rho_{agua}(3-2n)}$$

El equilibrio de traslación da información entre V, n y masas, ya que si está apoyado N>0, luego

$$m_1+m_2-\rho_{agua}V(2-n)>0$$
$$m_1+m_2>\rho_{agua}V(2-n)$$

En esta expresión los dos términos son positivos, ya que n≤1, luego -n≥-1, 2-n≥1
Combinando esta expresión y la obtenida para traslación, sustituyendo el término V(2-n) que es positivo

$$m_1+m_2>\cancel{\rho_{agua}}\frac{(2m_1+m_2)}{\cancel{\rho_{agua}}(3-2n)}(2-n)$$
$$m_1+m_2>(2m_1+m_2)\frac{(2-n)}{(3-2n)}$$

En esa expresión como V(2-n) es positivo, sabemos que el término de la derecha debe ser positivo, lo que implica, ya que ($2m_1+m_2$) es positivo, y (2-n) es positivo (n es menor que 1), implica que (3-2n) debe ser positivo.
3-2n>0 → 3>2n → n<3/2, condición que no aporta nada ya que sabíamos que n≤1.
Si planteamos la situación en la que la varilla esté sin tocar el fondo, la masa más pesada (m_2)estará abajo y la más ligera (m_1) arriba, y la varilla quedará vertical. Analizar la condición de flotabilidad en este caso es comprobar la diferencia entre peso y empuje, validando si peso aparente es mayor o menor que 0. De nuevo m_2 estará de nuevo totalmente sumergida, pero ahora no sabemos qué parte de m_1 está sumergida. Cualitativamente ahora no hay normal, luego el equilibrio de traslación hace que la componente hacia abajo (descontando la normal ahora inexistente) sea mayor que en la situación anterior, por lo que ahora estará más sumergida que antes, y habrá algo más de empuje que antes, pero no es inmediato saber si ese aumento de empuje compensa la ausencia de normal, más sin saber el ángulo ni el valor de n.

$$P_{aparente}=P-E=P_1+P_2-E_1'-E_2$$
$$P_{aparente}=m_1\cdot g+m_2\cdot g-V_{desalojado1}\cdot\rho_{agua}\cdot g-V\cdot\rho_{agua}\cdot g$$

El límite de flotabilidad estaría asociado a que el peso aparente fuera 0 y al mismo tiempo m_1 estuviera totalmente sumergida que sería el empuje máximo. Flota si peso aparente es negativo

$$P_{aparente}<0$$
$$P-E<0\Rightarrow P<E$$
$$m_1\cdot g+m_2\cdot g<V_{desalojado1}\cdot\rho_{agua}\cdot g+V\cdot\rho_{agua}\cdot g$$

Usamos la expresión de V en función de masas y n del análisis de la situación en la que está apoyado.

$$m_1\cdot\cancel{g}+m_2\cdot\cancel{g}<V\cdot\rho_{agua}\cdot\cancel{g}+V\cdot\rho_{agua}\cdot\cancel{g}$$
$$m_1+m_2<2\frac{2m_1+m_2}{\cancel{\rho_{agua}}(3-2n)}\cdot\cancel{\rho_{agua}}$$
$$m_1+m_2<2\frac{2m_1+m_2}{3-2n}$$

$$3m_1+3m_2-2nm_1-2nm_2<4m_1+2m_2$$
$$(3-4-2n)m_1<(2-3+2n)m_2$$
$$\frac{-2n-1}{-1+2n}<\frac{m_2}{m_1}$$
$$\frac{1+2n}{1-2n}<\frac{m_2}{m_1}$$

La condición de flotabilidad con n y masas que se pide es $\frac{1+2n}{1-2n}<\frac{m_2}{m_1}$

Si es una igualdad la masa 1 estará totalmente sumergida, es el límite de flotabilidad, y si no se cumple el sistema se hundirá.

Pero como sabemos que $m_2/m_1>1$ podemos ver que:
Término a la derecha de la desigualdad m_2/m_1 siempre es positivo
Numerador (1+2n) siempre es positivo
Denominador (1-2n) puede tener signo positivo o negativo, o ser cero si n=1/2
Cociente (1+2n)/(1-2n) puede tener signo, y hay varias opciones:
-Si 1-2n es negativo, siempre se cumple, lo que quiere decir 1-2n<0 → 1<2n → **n>1/2 siempre flota.**
-Si n=1/2 tenemos una singularidad tal y como está expresado, pero en la expresión original antes de despejar

$$m_1+m_2<2\frac{2m_1+m_2}{3-2\frac{1}{2}}\Rightarrow m_1+m_2<\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}2m_1+m_2\Rightarrow m_1<2m_1$$ Condición imposible, no flotaría

-Si 1-2n es positivo, se cumplirá en función de su valor
Si despejamos n en este caso (1-2n es positivo, no se invierten las desigualdades)

$$m_1+2nm_1<m_2-2nm_2\Rightarrow 2n(m_1+m_2)<m_2-m_1\Rightarrow n<\frac{m_2-m_1}{2(m_1+m_2)}$$

Se ve que si $m_1>m_2$ el numerador es negativo y nunca se cumplirá: no puede flotar si la masa superior es mayor a la central.
Si $m_1<m_2$ el numerador es positivo, y flotará o no en función de la relación entre masas y la relación entre volúmenes que contiene n.

Se podría plantear (no lo pide el enunciado) qué ocurre en aguas poco profundas: una idea sería plantear una condición adicional que para que en aguas poco profundas la varilla esté tocando el fondo, como que $P_2 > E_2$.

Terminamos contestando explícitamente a la pregunta del enunciado:
¿Flotará este sistema o se hundirá si lo echamos al agua en un lugar suficientemente profundo?
Si el sistema flota apoyado según la figura del enunciado, la condición de flotabilidad nos indica que el sistema flotará en vertical cuando no esté apoyado si n>1/2.