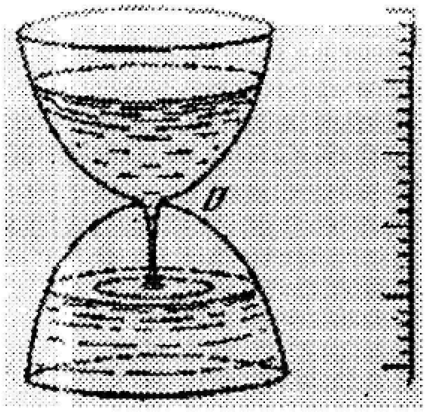
enrique@fiquipedia.es Revisado 12 junio 2016

5. Los relojes de la antigua Grecia (clepsidras) consistían en un recipiente con un orificio pequeño "O" donde el tiempo se iba marcando por el nivel de agua en el recipiente superior, como indica la figura ¿Qué forma debe tener el recipiente para que la escala de tiempo sea uniforme?
La simetría del recipiente es axial.



Similitudes con Cataluña 1995-2-5, donde se detalla desarrollo Torricelli a partir de Bernouilli

El orificio tiene área S_0, y su caudal $Q_0=v_0·S_0$
Para la velocidad de salida por el orificio, utilizamos el teorema de Torricelli, que se puede deducir usando la ecuación de Bernouilli $p+\rho g z+\frac{1}{2}\rho v^2=cte$
Igualamos en dos puntos del depósito. Tomamos z como altura con z=0 en la superficie del depósito, valores positivos crecientes hacia arriba, por lo que tiene sentido opuesto a h que es profundidad, siendo h positiva.
A: superficie
-Término presión fluido: Presión atmosférica
-Término presión cinética: v=0 (asumimos que el depósito es ancho y el agujero pequeño)
-Término presión altura: 0
B: agujero
-Término presión fluido: Presión atmosférica
-Término presión cinética: v_{salida}
-Término presión altura: -ρgh
Igualando ambos términos

$$\cancel{P_{atm}}+0+0=\cancel{P_{atm}}-\rho g h+\frac{1}{2}\rho v_{salida}^2$$

$$v_{salida}=\sqrt{2gh}$$

>Puede parecer extraño igualar velocidad a cero arriba cuando precisamente queremos que esa velocidad sea constante y uniforme, para que la "escala de tiempo sea uniforme "estando marcada por el descenso del nivel del agua", pero se trata de considerarla pequeña.

$$Q_0=\sqrt{2gh}S_0$$

En la superficie de arriba S, su caudal es Q=v·S
La velocidad debe ser uniforme, una constante (v=dh/dt)
Como tiene simetría axial, $S=\pi r^2$ (llamamos r a la distancia al eje)
Por la ecuación de continuidad el caudal en la superficie de arriba es igual que en el orificio.

$$Q=Q_0$$

$$v\pi r^2=\sqrt{2gh}S_0$$

$$h=\frac{v^2\pi^2 r^4}{2gS_0^2}$$

Considerando h=y, r=x, podemos considerarlo como una ecuación $y=k·x^4$, siendo k una constante $k=\frac{v^2\pi^2}{2gS_0^2}$ que es la que define la forma de la clepsidra.