Física

2.- Suponemos gotas de lluvia que caen desde una cierta altura h.
Calcular:
a) Si no hubiera fricción, la velocidad con la que llega a tierra.
b) Considerando que las gotas experimentan una fuerza de fricción F=-amv^2. Calcular v(h) y encontrar la velocidad límite.
c) Realizar los correspondientes cálculos numéricos con los datos: h=4 km y a=0,1 en las correspondientes unidades.

Referencias:
Valencia 2008-1 y Extremadura 1996-Física 1

Por claridad y evitar confusión entre la constante a del enunciado con la a asociada a aceleración, usamos "a" para la constante tal y como indica enunciado y "a_c" para aceleración.

a) Si no hay fricción, y despreciando el empuje, la única fuerza que actúa es el peso. Las gotas caen en la troposfera, en un margen de altura en que podemos considerar g constante, por lo que es un MRUA con $|a_c|$=g,y la velocidad a una altura h, si asumimos v_0=0.

$$v^2-v_0^2=2\cdot a_c\cdot s\Rightarrow v=\sqrt{2gh}$$

b) Tomamos sistema de referencia: eje x vertical, sentido positivo hacia abajo, x=0 y t=0 en el inicio del movimiento, con lo que x y v son positivas y aumentan.

Aplicamos la 2ª ley de Newton
$$\cancel{m}g-\cancel{m}av^2=\cancel{m}\cdot a_c$$
$$g-av^2=\frac{dv}{dt}$$

Necesitamos una expresión de v en función de x.

$$g-av^2=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$
$$dx=\frac{vdv}{g-av^2}\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^v\frac{vdv}{g-av^2}$$
$$x=\frac{-1}{2a}[\ln(g-av^2)]_0^v+c_1$$
$$-2ax+c_2=\ln\left(\frac{g-av^2}{g}\right)\leftarrow[llamamos\, c_2=2ac_1]$$
$$e^{-2ax+c_2}=e^{\ln\left(\frac{g-av^2}{g}\right)}$$
$$e^{-2ax}\cdot e^{c_2}=\frac{g-av^2}{g}$$
$$gc_3e^{-2ax}=g-av^2\leftarrow[llamamos\, c_3=e^{c_2}]$$
$$v=\sqrt{\frac{g}{a}\left(1-c_3e^{-2ax}\right)}$$

Planteamos condición: x=0 → v=0, lo que implica c_3=1, con lo que la expresión final es

$$v=\sqrt{\frac{g}{a}\left(1-e^{-2ax}\right)}$$

Validaciones físicas:
-Si g mayor la velocidad es mayor
-Si a=0, sale una indeterminación 0/0, pero si se hace un desarrollo por Taylor en x=0
http://www.wolframalpha.com/input/?i=taylor+series+sqrt%28a%2Fb*%281-e^%28-2bx

%29%29%29 todos los términos dependen de b y se anulan salvo el primero, con lo que
$v=\sqrt{2gx} \Rightarrow v^2=2gx$ que es una expresión de MRUA
-La velocidad aumenta según cae, pero tiene un límite, ya que si x=∞ (cae durante mucho tiempo), la velocidad es constante, velocidad terminal, y el valor es el que se pide

$$v(x=\infty)=\sqrt{\frac{g}{a}}$$

Modificamos la expresión para que sea en función de altura, tal y como se pide en enunciado. Si llamamos h a la variable altura, y H al valor de altura inicial.
x=0 implica h=H, y x=H implica h=0, x=H/4 implica h=3H/4, cuando x crece h decrece
La relación es **x=H-h**, y sustituyendo en la expresión para que quede en función de altura

$$v=\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^{-2a(H-h)})}$$

b) Numéricamente para H=4000 m y a=0,1 (las unidades de la constante a en el Sistema Internacional serían m^{-1}, para que haya consistencia dimensional en las unidades)

$$v=\sqrt{\frac{9,8}{0,1}(1-e^{-2\cdot 0,1\cdot(4000-h)})}=\sqrt{98\cdot(1-e^{-800+0,2\cdot h})}$$

La velocidad límite sería $v=\sqrt{\frac{9,8}{0,1}}=10\, m/s^2$ (la expresamos con 1 cifra significativa)