enrique@fiquipedia.es Revisado 11 junio 2016

Física

1.- Se practica un túnel a través de un planeta homogéneo, de radio R y masa M, y que sale por el otro extremo. Desde la superficie se deja caer un objeto de masa m con velocidad inicial nula, hacia dentro del túnel. Calcular:
a) Valor de la intensidad del campo gravitatorio en cualquier punto del interior, en función de los parámetros descritos y de la distancia al centro r.
b) Demuestre el tipo de movimiento que sigue la partícula cuando se deja caer desde un extremo del túnel.
c) ¿Cuánto tiempo transcurriría si se deja en libertad un objeto desde uno de sus extremos en llegar al otro?
Datos: $d_{planeta}=5{,}51\cdot10^3$ kg/m^3 ; $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Referencias:
Problemas con Gauss gravitatorio: 2010 Madrid 1
Problemas con túnel gravitatorio y MAS: 1994 Galicia 2, 1995 Cataluña 1-1, 1999 Cataluña 1-1

a) Para calcular la intensidad de campo gravitatorio en el interior utilizamos el teorema de Gauss aplicado al campo gravitatorio, tomando como superficie una esfera concéntrica con el planeta de radio r. $\oint \vec{g}\cdot\vec{dS}=-4\pi G M_{interior}$
Por la simetría del problema sabemos que el vector dS y el campo son paralelos y tienen sentidos opuestos (el vector superficie va dirigido hacia la parte convexa y el campo hacia el interior), el campo es uniforme en toda la superficie esférica, y al ser homogéneo y utilizando la expresión de la densidad y del volumen de la esfera podemos plantear, llamando g al módulo del campo

$$-g\int dS=-4\pi G\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow g\cancel{4\pi r^2}=\cancel{4\pi} G\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow g=\frac{4}{3}\pi\rho G r$$

Dado que el campo es un vector

$$\vec{g}=\frac{-4}{3}\pi\rho G r\vec{u}_r$$

Sustituyendo numéricamente y expresando con 3 cifras significativas

$$\vec{g}=\frac{-4}{3}\pi 5{,}51\cdot10^3\cdot6{,}67\cdot10^{-11} r\vec{u}_r=-1{,}54\cdot10^{-6} r\vec{u}_r [g\, en\, N/kg\, ó\, m/s^2 ; r\, en\, m]$$

>Como curiosidad podemos validar que si R=6370·10^3 m, se tiene un campo en superficie de valor E=9,8 m/s^2, por lo que aunque enunciado no lo cite explícitamente son los datos de la Tierra, y podemos recordar valores orientativos de otros problemas.
b) Según la definición de campo g=F/m y la 2ª ley de Newton, F=m·a, tenemos que la fuerza es proporcional a la distancia a la posición de equilibrio F=-kx, y que $a=-\omega^2 x$ siendo x=0 (r=0, el centro del planeta) esa posición de equilibrio, lo que demuestra que es un MAS; la definición de MAS supone que la posición cumple la ecuación diferencial planteada $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$ cuyas soluciones para la posición son funciones sinusoidales.
c) En este caso podemos calcular el periodo

$$k=\frac{4}{3}\pi\rho G \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi 5{,}51\cdot10^3\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}}=5{,}06\cdot10^3 s\approx 84\, min$$

El periodo sería el tiempo en completar un ciclo, que sería regresar a la misma posición, por lo que el tiempo en atravesar el planeta sería la mitad, 2,53·10^3 s