enrique@fiquipedia.es Revisado 15 mayo 2016

Enunciado no oficial/aproximado.

1.- O ^{98}Pd desintégrase por positróns en ^{98}Rh. Os seus periodos de semidesintegración respectivos son de 17 e 8,7 minutos. Encontrar a actividade máxima do segundo nucleido en función da preparación, se no momento inicial había só núcleos do primeiro elemento.

1.- El ^{98}Pd se desintegra por positrones en ^{98}Rh. Sus respectivos periodos de semidesintegración son de 17 y 8,7 minutos. Encontrar la actividad máxima del segundo nucleido en función de la preparación, si en el momento inicial sólo había núcleos del primer elemento.

Referencias

Física Nuclear y de Partículas, Antonio Ferrer Soria, Universitat de València. Cadenas Radiactivas, Ecuaciones de Bateman
"RADIACTIVIDAD Y DECAIMIENTO RADIACTIVO" MARCO ANTONIO ALPACA CHAMBA *http://es.slideshare.net/MarcoAntonio235/decaimiento-radiactivo-43388833*
MÉTODOS CLÁSICOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Juan Luis Varona Malumbres *http://www.unirioja.es/cu/jvarona/downloads/LibroED.pdf#page=30*
RECETA 5. Ecuaciones lineales de primer orden y'+a(x)y=b(x)

El ^{98}Pd ("padre", Paladio, Z=46), se desintegra en ^{98}Rh ("hijo", Rodio, Z=45)
Por definición de actividad $A=\lambda N$
Tenemos dos tipos de núcleos: hay dos cantidades de núcleos y dos constantes
En lugar de usar N_{Pd} y N_{Rh} , λ_{Pd} y λ_{Rh} usamos subíndice 1 para padre y 2 para hijo (los mismos subíndices que aparecen en referencias para ecuaciones de Bateman)
El padre se va desintegrando en el hijo, y está claro cómo conocer la cantidad de núcleos del padre.

$$A_1=\lambda_1 N_1 \Rightarrow \frac{-d N_1}{dt}=\lambda N_1 \Rightarrow \frac{dN_1}{N_1}=-\lambda_1 dt \Rightarrow \ln\left(\frac{N_1}{N_1}\right)=-\lambda_1 t \Rightarrow N_1=N_{1_0} e^{-\lambda_1 t}$$

Pero la cantidad de núcleos del hijo tiene dos contribuciones:
-Los núcleos del hijo que aparecen procedentes de la desintegración del padre
-Los núcleos del hijo que desaparecen por su propia desintegración.
La actividad del núcleo hijo de Rh sigue cumpliendo $A_2=\lambda_2 N_2$ pero es importante tener claro que **ahora no podemos plantear simplemente que** $A_2=\frac{-d N_2}{dt}$.
Cualitativamente podemos ver que los núcleos de hijo presentes son los procedentes de padres que aparecen menos los que se desintegran

$$d N_2=\lambda_2 N_2 dt-\lambda_1 N_1 dt$$

$$\frac{d N_2}{dt}=\lambda_2 N_2-\lambda_1 N_1$$

Esta expresión es una ecuación diferencial, que podemos combinar N_1 con la expresión anterior para los núcleos del padre y obtener $\frac{d N_2}{dt}=\lambda_1 N_{1_0} e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2 N_2$ (1)
Esta tiene una solución no muy compleja http://www.wolframalpha.com/input/?i=dx%2Fdt+%3D+a*exp%28-bt%29-k*x
Se puede resolver viendo que es un caso de y'+a(x)y=b(x) siendo $a(x)=\lambda_2 ; b(x)=\lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_2 t}$ (ver referencias)
Pero en lugar de resolverla, sabemos que es un caso de las ecuaciones de Bateman, y sin plantear directamente la expresión final sí planteamos que la solución tiene esta forma

$N_2=\alpha e^{-\lambda_1 t}+\beta e^{-\lambda_2 t}$ (2)

Nos piden N_2 máxima, necesitamos los valores de α y β en función de los datos, que son las constantes de desintegración

Derivando N_2 obtenemos nueva expresión

$$\frac{dN_2}{dt}=-\alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}-\beta\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (3)$$

Igualamos expresiones (1) y (3) para dN_2/dt

$$\lambda_1 N_{1_0} e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2 N_2=-\alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}-\beta\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Sustituyendo la expresión (2) para dejarlo en función de t obtenemos α

$$\lambda_1 N_{1_0} e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2(\alpha e^{-\lambda_1 t}+\beta e^{-\lambda_2 t})=-\alpha\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}-\beta\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 N_{1_0} e^{-\lambda_1 t}=\alpha e^{-\lambda_1 t}(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$\lambda_1 N_{1_0}=\alpha(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$\alpha=N_{1_0}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

Para obtener β necesitamos utilizar una condición inicial: en t=0, N_2 es cero: usamos ecuación (2).

$$0=\alpha e^0+\beta e^0 \Rightarrow \beta=-\alpha$$

Sustituyendo en (2) los valores de α y β para tener la expresión de N_2.

$$N_2=N_{1_0}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}-N_{1_0}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}=N_{1_0}\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$$

(Expresión que es directamente la ecuación de Bateman)

La actividad que es lo que nos pide el enunciado

$$A_2=\lambda_2 N_2=N_{1_0}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t})$$

Nos piden que sea máxima, derivamos e igualamos a cero

$$\frac{dA_2}{dt}=0\Rightarrow\cdot N_{1_0}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t})=0$$

$$-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}=0\Rightarrow\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}=\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}=0$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=e^{\lambda_1 t-\lambda_2 t}\Rightarrow\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)=(\lambda_1-\lambda_2)t$$

El máximo (no validamos con derivada segunda) se produce para

$$t=\frac{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

Numéricamente $T_{1/2}=\frac{\ln(2)}{\lambda}\Rightarrow\lambda_1=\frac{\ln(2)}{17}min;\lambda_2=\frac{\ln(2)}{8,7}min;$

$$t=\frac{\ln\left(\frac{\cancel{\ln(2)}}{17}\cdot\frac{8,7}{\cancel{\ln(2)}}\right)}{\frac{\ln(2)}{17}-\frac{\ln(2)}{8,7}}=17,22\,min=1033,3\,s$$

El resultado final pedido es la actividad máxima "en función de la preparación", que entendemos como la actividad inicial $A_{1_0}=\lambda 1\cdot N_{1_0}$ o el número de núcleos inicial N_{1_0} , que no son dato.

$$A_{2 máx}=N_{1_0}\frac{\frac{\ln(2)}{17}\frac{\ln(2)}{8,7}}{\frac{\ln(2)}{8,7}-\frac{\ln(2)}{17}}(e^{\frac{-\ln(2)}{17}17,22}-e^{\frac{-\ln(2)}{8,7}17,22})=0,0202\,N_{1_0}[núcleos/min]=3,37\cdot10^{-4}N_{1_0}Bq$$