2. Sobre una boya cilíndrica de 0,20 m^2 de superficie (de base) y 200 kg de masa está situado un cuerpo de 40 kg, flotando el conjunto en el mar. Si el cuerpo cae al mar, demostrar que la boya realiza un movimiento armónico simple y calcular la amplitud y el periodo. Densidad del agua del mar = 1.04 g/cm^3. Se supone que el movimiento de la boya es vertical.

Similar a Baleares 2001-2 y Madrid 1996-2
Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/estatica/boya/boya.htm
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_de_un_cuerpo_parcialmente_sumergido

Se pide demostrar que realiza un movimiento armónico simple; eso supone llegar a la expresión cinemática $a=-\omega^2 x$, dinámica $F=-kx$, o energética $E=\frac{1}{2}kx^2$. Por ello realizamos primero el desarrollo analíticamente sin sustituir los valores.
Primero calculamos la posición de equilibrio de la boya con la masa m encima: esta será la posición incial de la oscilación.
Llamamos h_1 a la porción de boya que está dentro del agua.
En equilibrio Peso=Empuje

$$(m_{cuerpo}+m_{boya})\cdot \cancel{g}=V_{sumergido}\cdot \rho_{líquido}\cancel{g}$$

$$m_{cuerpo}+m_{boya}=S\cdot h_1\cdot \rho_{líquido}\Rightarrow h_1=\frac{m_{cuerpo}+m_{boya}}{S\cdot \rho_{líquido}}$$

Una vez que se caiga la masa, habrá una nueva posición de equilibrio, en la que la boya estará más emergida y habrá menos distancia dentro del agua: esta será la posición de equilibrio de oscilación.

$$m_{boya}\cdot \cancel{g}=V_{sumergido}\cdot \rho_{líquido}\cancel{g}\Rightarrow h_2=\frac{m_{boya}}{S\cdot \rho_{líquido}}$$

Planteamos dinámicamente, considerando que no hay rozamiento ni pérdidas
Tomamos eje x vertical con x positivas hacia arriba, llamamos x a la posición del extremo inferior de la boya, siendo x=0 la posición de equilibrio.

$$-m_{boya}\cdot g+V_{sumergido}\cdot \rho_{líquido}\cdot g=m_{boya}\cdot a$$

$$-m_{boya}\cdot g+S\cdot (h_2-x)\cdot \rho_{líquido}\cdot g=m_{boya}\cdot a$$

$$-m_{boya}\cdot g+S\cdot \left(\frac{m_{boya}}{S\cdot \rho_{líquido}}-x\right)\cdot \rho_{líquido}\cdot g=m_{boya}\cdot a$$

$$-S\cdot \rho_{líquido}\cdot g=m_{boya}\cdot a\Rightarrow a=\frac{-S\cdot \rho_{líquido}\cdot g}{m_{boya}}x$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{200}{0,2\cdot 1040\cdot 9,8}}=1,97\,s$$

$$a=-\omega^2 x\,;\,\omega=\sqrt{\frac{S\cdot \rho_{líquido}\cdot g}{m_{boya}}}\,;\,T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_{boya}}{S\cdot \rho_{líquido}\cdot g}}$$

Lo razonamos dinámicamente; en el momento en el que el cuerpo cae, ya no hay equilibrio, el empuje es mayor que el peso, y empuje menos el peso, que es la fuerza recuperadora, es máxima, y su valor es el peso del cuerpo.

Se puede asociar $P_{cuerpo}=|F_{máx}|=k\cdot A$, siendo $k=m\omega^2$; $A=\frac{F_{máx}}{k}=\frac{m_{cuerpo}\cdot \cancel{g}}{S\cdot \rho_{líquido}\cdot \cancel{g}}=0,192\,m$

Cualitativamente se puede ver que realiza un movimiento armónico simple con amplitud $A=h_1-h_2$

$$A=h_1-h_2=\frac{40+200}{0,2\cdot 1040}-\frac{200}{0,2\cdot 1040}=0,192\,m$$