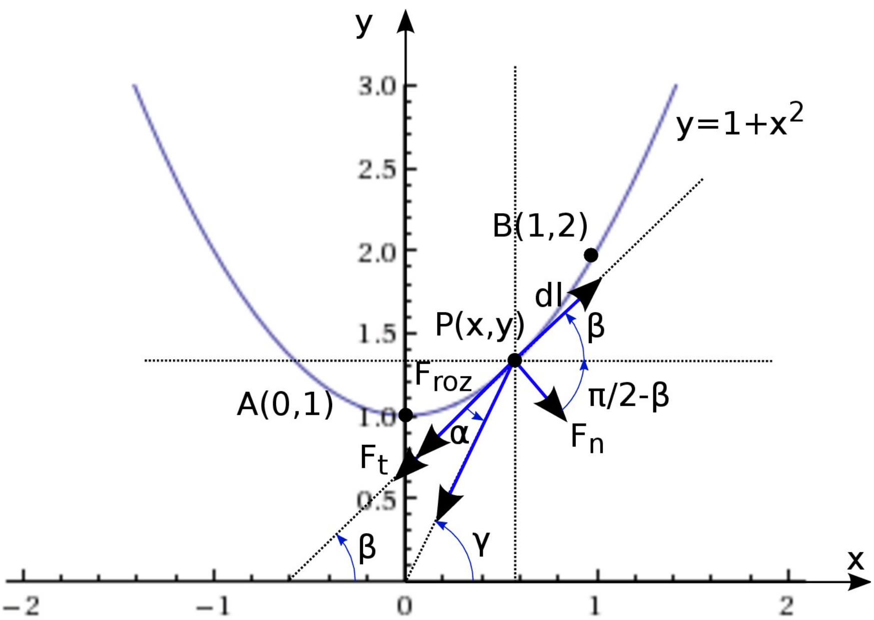
1. Una partícula resulta atraída hacia el origen O (0,0) por una fuerza cuyo módulo es proporcional a la distancia r desde la partícula hasta el origen. Calcular el trabajo que se realiza al mover la partícula desde el punto A (0,1) hasta B (1,2) a lo largo de la trayectoria dada por y = 1 + x^2 si el rozamiento entre la partícula y la trayectoria es μ.

Resuelto por sleepylavoisier en http://docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=4018#p18044
Referencia:
Física. Curso teórico práctico de fundamentos físicos de la ingeniería; F.J. Gálvez, R.López, A.Llopis, C.Rubio, Universidad Politécnica de Valencia, ISBN 84-7360-187-4
https://books.google.es/books?id=AJA-GRmTzHEC&pg=PA209#v=onepage&q&f=false problema E-5-10 enunciado idéntico, incluye resolución. (La resolución usa trigonometría,aquí se plantea geometría y la relación de dl y de la fuerza normal con x, dx. y, dy)

Referencias:
Fuerzas centrales 2000 Murcia A2

Realizamos una representación: si el movimiento es de A hacia B, la fuerza de rozamiento es opuesta al rozamiento. La normal es perpendicular a la tangente a la superficie. Utilizamos la definición de trabajo $W=\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dl}$ donde el diferencial de desplazamiento es tangente a la trayectoria. La fuerza aplicada debe vencer las dos fuerzas que indican: fuerza de atracción al origen y la fuerza de rozamiento, por lo que la fuerza aplicada tiene sentido opuesto.



$$\vec{F}=-\vec{F}_{atracción}-\vec{F}_{roz}$$

La fuerza normal es la componente normal a la trayectoria de la fuerza, y su valor influye en la fuerza de rozamiento que tiene como módulo μN. La fuerza normal no realiza trabajo ya que siempre es normal a la trayectoria; solamente realizan trabajo la componente tangencial y la fuerza de rozamiento.

$$W=\int_A^B(-\vec{F}_{atracción}-\vec{F}_{roz})\vec{dl}=-\int_A^B \vec{F}_{atracción}\vec{dl}-\int_A^B \vec{F}_{roz}\vec{dl}$$

Planteamos cada término por separado

-Término debido a la fuerza de atracción:

Llamamos K a la constante de proporcionalidad, por lo que F=Kr, siendo r la distancia del origen al punto P

$$\vec{F}_{atracción}=-Kr\vec{u}_r=-K\cancel{r}\frac{\vec{r}}{\cancel{r}}=-K(x\vec{i}+y\vec{j})=-K(x\vec{i}+(1+x^2)\vec{j})$$

$$\vec{dl}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}\ siendo\ y=1+x^2\Rightarrow dy=2x\,dx\ ;\ \vec{dl}=dx\,\vec{i}+2x\,dx\,\vec{j}$$

Combinando ambas

$$W_{atracción}=K\int_A^B (x\vec{i}+(1+x^2)\vec{j})(dx\,\vec{i}+2x\,dx\,\vec{j})=K\int_A^B (x\,dx+2x\,dx+2x^3\,dx)$$

$$W_{atracción}=K\int_{(0,1)}^{(1,2)} (3x+2x^3)\,dx=K[\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{4}x^4]_{(0,1)}^{(1,2)}=K(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})=2K$$

El trabajo realizado por el campo será opuesto, negativo.
Sin usar la ecuación de trayectoria llegamos al mismo resultado:

$$W_{atracción}=K\int_A^B (x\cdot dx+y\cdot dy)=K[\frac{x^2}{2}]_0^1+K[\frac{y^2}{2}]_1^2=2K-\frac{K}{2}+\frac{K}{2}=2K$$

Se puede ver que es una fuerza conservativa, el trabajo realizando por el campo solamente depende de punto inicial y final, no del trayecto por el que se ha llegado de un punto a otro.

-Término debido a la fuerza de rozamiento:

$$\vec{F}_{rozamiento}=-\mu N\,\vec{dl}$$

$$\vec{dl}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}\ siendo\ y=1+x^2\Rightarrow dy=2x\,dx\ ;\ \vec{dl}=dx\,\vec{i}+2x\,dx\,\vec{j}$$

El vector normal forma 90º con el vector tangente a la trayectoria (no con vector r que une origen con punto de la trayectoria), por lo que si giramos un vector tangente que tiene coordenadas $\vec{l}=\vec{i}+2x\vec{j}$ (tomamos signos del diagrama) tenemos $\vec{N}=2x\vec{i}-\vec{j}$, y al ser perpendiculares podemos comprobar que su producto escalar es 0.
El módulo de a normal será la proyección de la fuerza de atracción dirigida al origen sobre esa normal, lo que es el producto escalar, y el vector unitario sería

$$\vec{u}_n=\frac{2x\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{j}$$

$$N=|\vec{N}|=\vec{F}_{atracción}\cdot\vec{u}_n=K(x\vec{i}+(1+x^2)\vec{j})\cdot\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{j}\right)=K\frac{(2x^2-1-x^2)}{\sqrt{4x^2+1}}=K\frac{x^2-1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

$$W_{rozamiento}=-\mu\int_A^B N\,\vec{u}_l\,\vec{dl}$$

$$\vec{u}_l=\frac{\vec{i}+2x\vec{j}}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{i}+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{j}$$

$$W_{rozamiento}=-\mu\int_A^B K\frac{x^2-1}{\sqrt{4x^2+1}}(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{i}+\frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}}\vec{j})(dx\,\vec{i}+2x\,dx\,\vec{j})$$

$$W_{rozamiento}=-\mu K\int_A^B \frac{x^2-1+4x^4-4x^2}{4x^2+1}dx$$

$$W_{rozamiento}=-\mu K\int_A^B \frac{4x^4-3x^2-1}{4x^2+1}dx$$

Planteamos la integral racional, hacemos primero el cociente de polinomios

$4x^4$ $-3x^2$	-1	$\lvert 4x^2+1$
$4x^4$ $+x^2$		x^2-1
$-4x^2$	-1	
$-4x^2$	-1	
	0	

$$\frac{4x^4-3x^2-1}{2x^2+1}=x^2-1$$

$$W_{rozamiento}=-\mu K\int_A^B (x^2-1)\,dx=-\mu K\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=-\mu K(\frac{1}{3}-1)=\frac{2}{3}\mu K$$

$$W_{total\,A\rightarrow B}=2K+\frac{2}{3}\mu K=2K(1+\frac{\mu}{3})$$

Resolución con planteamiento *Física. Curso teórico práctico de fundamentos físicos de la ingeniería; F.J. Gálvez, R.López, A.Llopis, C.Rubio, Universidad Politécnica de Valencia, ISBN 84-7360-187-4*
https://books.google.es/books?id=AJA-GRmTzHEC&pg=PA209#v=onepage&q&f=false problema *E-5-10*
(usa trigonometría y me parece más rebuscado, lo pongo por entender lo que se hace y validar que se llega al mismo resultado, nunca se me hubiera ocurrido plantearlo así)

$\alpha+\beta+(180-\gamma)=180 \Rightarrow \alpha=\gamma-\beta$

$$x=r\cos\gamma$$
$$y=r\,sen\,\gamma$$
$$dx=dl\cdot\cos\beta$$
$$dy=dl\cdot sen\beta$$

$$W=K\int_A^B (r\cos(\gamma-\beta)+\mu\, r\,sen(\gamma-\beta))\,dl$$

Usando el coseno y el seno de la diferencia

$$\cos(a-b)=sen(a)\cdot sen(b)+\cos(a)\cdot\cos(b)$$
$$sen(a-b)=sen(a)\cdot\cos(b)-\cos(a)\cdot sen(b)$$

$$W=K\int_A^B (r\,sen(\gamma)\cdot sen(\beta)+r\cos(\gamma)\cdot\cos(\beta)+\mu\, r\,sen(\gamma)\cdot\cos(\beta)-\mu\, r\cos(\gamma)\cdot sen(\beta))\,dl$$

$$W=K\int_A^B (r\,sen(\gamma)\cdot sen(\beta)+r\cos(\gamma)\cdot\cos(\beta))\,dl+K\int_A^B (\mu\, r\,sen(\gamma)\cdot\cos(\beta)-\mu\, r\cos(\gamma)\cdot sen(\beta))\,dl$$

Combinando relaciones anteriores para dejar en función de x e y

$$x=r\cos\gamma$$
$$y=r\,sen\,\gamma$$
$$dx=dl\cdot\cos\beta$$
$$dy=dl\cdot sen\,\beta$$

$$W=K\int_A^B (y\cdot dy+x\cdot dx)+K\mu\int_A^B (y\cdot dx-x\cdot dy)$$

$y=x^2+1$, luego $x^2=y-1$

$$W=K\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2+K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+K\mu\int_A^B ((x^2+1)\cdot dx+\sqrt{y-1}\cdot dy)$$

$$W=2K-\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+K\mu\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$W=2K+K\mu\frac{2}{3}=2K\left(1+\frac{\mu}{3}\right)$$

Siguien del desarrollo se puede ver resultado como dos términos, el primero asociado a integrar la componente de la fuerza tangencial (en el resultado no interviene la trayectoria) y el segundo asociado a integrar la fuerza de rozamiento