enrique@fiquipedia.es Revisado 18 febrero 2016

CUESTIÓN 1: ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda de un violín para que vibre en su tercer armónico con una frecuencia de 800 Hz.? La longitud de esa cuerda del puente a las clavijas es de 330 mm, y su masa es de 0,125 g.
Si la amplitud de las ondas transversales que dan lugar a esa vibración fuese de 20 mm. ¿Cuál es la ecuación del movimiento de la cuerda del violín?
¿Cuál es la velocidad máxima que puede tener un punto de la cuerda? Aplícalo para un punto que está a 200 mm de las clavijas y t=1 s.

Se trata de una onda estacionaria con ambos extremos fijos.
La longitud de onda de los distintos armónicos en ese caso son múltiplos de media longitud de onda

$$L=n\cdot\frac{\lambda}{2}(n=1,2,3,...)$$

Para el tercer armónico, n=3, tenemos que $0{,}330=3\cdot\frac{\lambda}{2}\Rightarrow\lambda=0{,}22\,m$

La longitud de onda está relacionada con a frecuencia y la velocidad de propagación

$$v=\lambda\cdot f=0{,}22\cdot 800=176\,m/s$$

La velocidad de propagación para una cuerda tensa tiene la expresión $v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

La densidad lineal de masa es $\mu=\frac{m}{L}=\frac{0{,}125\cdot 10^{-3}}{0{,}330}=\frac{25}{66}\cdot 10^{-3}\,kg/m$

Sustituyendo $176^2=T\frac{66}{25}\cdot 10^3\Rightarrow T=11{,}733\,N$

La ecuación de onda de una onda estacionaria es la suma de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos: se indica que la amplitud de estas ondas es de 20 mm, por lo que la amplitud máxima será el doble. Una suma de funciones trigonométricas se puede expresar como un producto de funciones; varía según la situación la expresión concreta, pero en este caso al ser extremos fijos para múltiplos de media longitud de onda la "amplitud de la elongación dependiente de la posición" debe ser 0 para x=0, por lo que debe ser una función seno (en otras situaciones de ondas estacionarias puede ser otra combinación)

$$y(x,t)=A\cos(\omega t-kx)-A\cos(\omega t+kx)=A(x)\cdot sen(\omega t) \qquad A_{(x)}=2A\,sen\,kx$$

$$y(x,t)=40\cdot sen\left(\frac{2\pi}{0{,}22}x\right)\cdot sen(2\pi 800t)[y\,en\,mm, x\,en\,m, t\,en\,s]$$

Se puede validar que en el extremo inicial, x=0, la elongación es 0 independientemente de t.
La velocidad máxima de oscilación es el valor máximo de la derivada de la posición

$$v(x,t)=\frac{d\,y(x,t)}{dt}=40\cdot 1600\cdot\pi\,sen\left(\frac{2\pi}{0{,}22}x\right)\cdot\cos(2\pi 800t)[v\,en\,mm/s, x\,en\,m, t\,en\,s]$$

La velocidad máxima de un punto depende de su posición, se puede ver como que hay una "amplitud de la velocidad" que depende de la posición

$$v(x,t)=V_{máx}(x)\cdot\cos(2\pi 800t)[v\,en\,mm/s, x\,en\,m, t\,en\,s]$$

$$Siendo\,V_{máx}(x)=201062\,sen\left(\frac{\pi}{0{,}11}x\right)[V_{máx}\,en\,mm/s, x\,en\,m]$$

Se puede validar que en el extremo inicial, x=0, la velocidad es 0 independientemente de t.

$$|V_{máx}|(x=0{,}2\,m)=201062\,sen\left(\frac{\pi}{0{,}11}\cdot 0{,}2\right)=|-108702|=108702\,mm/s$$

Ese es el valor máximo para ese punto, independientemente del instante de tiempo.
Como se da también el instante de tiempo

$$v(x=0{,}2\,m, t=1\,s)=V_{máx}(0{,}2\,m)\cdot\cos(2\pi 800\,1)=-108702\cdot\cos(1600\pi\cdot 1)=-108702\,mm/s$$