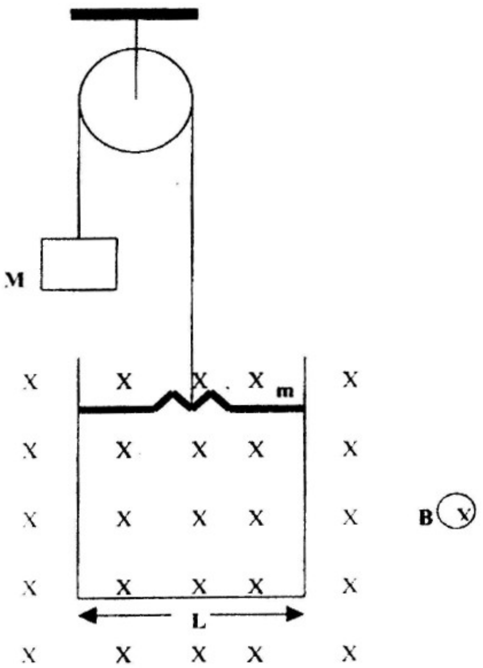
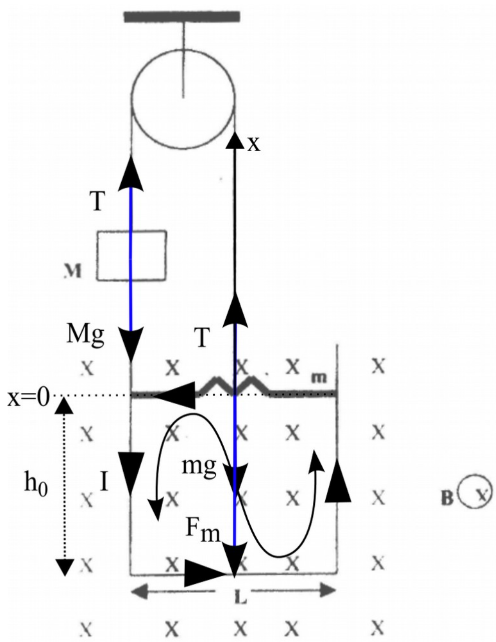
PROCEDIMIENTOS SELECTIVOS PARA EL ACCESO E INGRESO EN EL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA. AÑO 2002
PROBLEMAS Y CUESTIONES RELACIONADOS CON LA PARTE "A" DEL TEMARIO.
…
CRITERIOS DE CALIFICACIÓN
Cada apartado del problema debidamente justificado y razonado con la solución correcta se calificará con los puntos indicados a continuación:
…
Problema 2: a) 1 punto; b) 1 punto; c) 1 punto.

2.- De la polea de masa despreciable de la figura penden, a lo largo de una cuerda inextensible y de masa despreciable, una pesa de masa M=8 kg y una varilla conductora ligera, de masa m=2 kg y longitud l=0,2 m, que está obligada a moverse sobre unos carriles sin rozamiento. La resistencia eléctrica de la varilla es R=4 Ω, y la de los carriles se considera despreciable. El campo magnético (B=0,01 T) que actúa sobre el circuito formado por la varilla y los carriles conductores es perpendicular al plano del papel. Sabiendo que en instante inicial las masas M y m estaban en resposo. Se pide:
a) Analizar y dibujar las fuerzas que actúan sobre la pesa y la varilla conductora.
b) La velocidad de la varilla en función del tiempo. ¿En qué instante se hace constante la velocidad de la varilla?
c) La aceleración del sistema en función del tiempo y la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo.
Considerar $g=10\ m\cdot s^{-2}$



a) Reprentamos peso de ambas masas y tensiones, que al ser una cuerda inestensible y sin masa son iguales en ambos extremos en módulo. Pero además como la varilla va a ascender (M>m), el flujo aumentará, por lo que según Faraday-Lenz se producirá una corriente inducida que se oponga a ese aumento de flujo, que supondrá genera una corriente inducida tal que su campo tenga el sentido opuesto al campo, hacia fuera del papel. Por ello la corriente circulará en el sentido opuesto a las agujas del reloj en el diagrama, lo que genera una fuerza magnética sobre la varilla según la ley de Laplace $\vec{F}=I(\vec{l}\times\vec{B})$ estará dirigida hacia abajo, cualitativamente oponiéndose a que la varilla ascienday varíe el flujo.
b) Planteamos la 2ª ley de Newton en cada uno de los cuerpos, tomando eje x en el sentido del movimiento, que es hacia abajo para M y hacia arriba para m.



M: $Mg-T=Ma$
m: $T-mg-IlB=ma$
Si sumamos ambas expresiones y eliminamos la tensión
$Mg-mg-IlB=(M+m)a$
Que podríamos haber planteado cualtitativamente como “fuerzas a favor del movimiento menos las fuerzas en contra igual a masa total por aceleración”
Obtenemos la expresión de la intensidad que circula
El flujo en este caso lo podemos plantear $\Phi=\int \vec{B}\cdot d\vec{S}=...=B\cdot S=B\cdot l\cdot(h_0+vt)$
La fuerza electromotriz usando la ley de Faraday $|\varepsilon|=\left|\frac{-d\Phi}{dt}\right|=B\cdot l\cdot v$
Usando la ley de Ohm $I=\frac{V}{R}=\frac{B\cdot l\cdot v}{R}$
No consideramos el signo en tensión y corriente que ya hemos contemplado al indicar sentido en el diagrama
Combinando expresiones $(M-m)g-B^2l^2\frac{v}{R}=(M+m)a$
Para obtener la expresión de v integramos, ya que a=dv/dt y al sustituir es separable

$$(M-m)g-\frac{B^2l^2}{R}v=(M+m)\frac{dv}{dt}$$

$$dt=\frac{M+m}{(M-m)g-B^2l^2\frac{v}{R}}dv\Rightarrow\int_0^t dt=(M+m)\int_0^v\frac{dv}{(M-m)g-\frac{B^2l^2}{R}v}$$

$$t=-(M+m)\frac{R}{B^2l^2}\ln\left(\frac{(M-m)g-\frac{B^2l^2}{R}v}{(M-m)g}\right)=\frac{-(M+m)R}{B^2l^2}\ln\left(1-\frac{B^2l^2}{(M-m)gR}v\right)$$

$$1-\frac{B^2l^2}{(M-m)gR}v=e^{\frac{-B^2l^2}{(M+m)R}t}$$

$$v=\frac{(M-m)gR}{B^2l^2}\left(1-e^{\frac{-B^2l^2}{(M+m)R}t}\right)$$

Validaciones físicas:
Si t=0, v=0
Si M=m, v=0 para todo t
Sustituyendo numéricamente $v=\frac{(8-2)\cdot10\cdot4}{0{,}01^2 0{,}2^2}\left(1-e^{\frac{-0{,}01^2 0{,}2^2}{(8+2)4}t}\right)=6\cdot10^7(1-e^{-10^{-7}t})[t\,en\,s, v\,en\,m/s]$
Se pregunta para qué instante de t la velocidad es constante, y no ocurre en ningún caso; la velocidad tiene una variación exponencial y tiende con una asíntota a una velocidad límite para t=∞ que es $v(t=\infty)=6\cdot10^7 m/s$ Antes de que t sea infinito, la barra llegaría a la polea, o se recorrería tanta distancia que g ya no sería constante.
Además esa velocidad límite es un 20% de la velocidad de la luz, por lo que sí son necesarios cálculos relativistas, ya que $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}2^2}}=1{,}02$ por lo que respecto a no considerarlo relativista y asumir coeficiente 1 se comete un error del 2%.

CC BY

c) Derivamos velocidad para obtener aceleración

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{-(M-m)g\cancel{R}}{\cancel{B^2 l^2}}\left(\frac{-\cancel{B^2 l^2}}{(M+m)\cancel{R}}\right)e^{\frac{-B^2 l^2}{(M+m)R}t}=\frac{(M-m)}{(M+m)}g\,e^{\frac{-B^2 l^2}{(M+m)R}t}$$

Validaciones físicas: en t=0 hay una aceleración positiva, y en t=∞ la aceleración es cero (y la velocidad constante)

Sustituyendo numéricamente $a=\frac{(8-2)\cdot 10}{(8+2)}e^{-10^{-7}t}=6\cdot e^{-10^{-7}}[t\,en\,s, a\,en\,m/s^2]$

La fuerza electromotriz se obtiene sustituyendo con expresiones de apartado b

$$|\varepsilon|=B\cdot l\cdot v=\frac{(M-m)gR}{B\,l}\left(1-e^{\frac{-B^2 l^2}{(M+m)R}t}\right)=1{,}2\cdot 10^5(1-e^{-10^{-7}t})[t\,en\,s, \varepsilon\,en\,V]$$