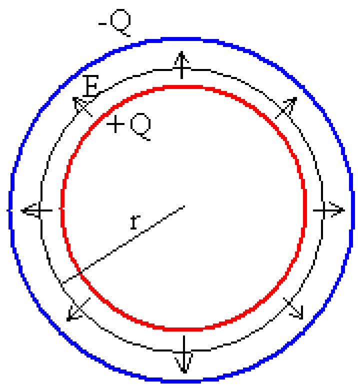
enrique@fiquipedia.es Revisado 13 febrero 2021

2001-C2. Dos conductors esfèrics de radis a i b (a < b), separats per una capa esfèrica aillant que, a tots els efects, es pot considerar que té $\varepsilon=\varepsilon_0$, estan carregats respectivament amb càrreges elèctriques Q i -Q.
a) Determineu la difèrencia de potencial entre els dos conductors.
b) Calculeu la capacitat del condensador així format.
c) Determineu l'energia del condensador carregat amb la càrrega Q, i expresseu-la, com a mínim, amb dues unitats d'energia diferents.
Dades específiques: b = 2a = 20 cm; Q = càrrega d'1 mol de protons

2001-C2. Dos conductores esféricos de radios a y b (a <b), separados por una capa esférica aislante que, a todos los efectos, se puede considerar que tiene $\varepsilon = \varepsilon_0$, están cargados respectivamente con carga eléctrica Q y -Q.
a) Determinar la diferencia de potencial entre los dos conductores.
b) Calcular la capacidad del condensador así formado.
c) Determinar la energía del condensador cargado con la carga Q, y expresarla, como mínimo, con dos unidades de energía diferentes.
Datos específicos: b = 2a = 20 cm; Q = carga de 1 mol de protones

Referencias:
Ver 1999-Cataluña-Problema2-2
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/esfera1/esfera1.htm
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Condensador_esf%C3%A9rico
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/capeng.html#c1

a) Para calcular la diferencia de potencial calculamos el potencial de una esfera cargada respecto a una posición infinitamente alejada, en la que tomamos referencia con potencial 0.
El problema tiene simetría esférica, por lo que entre la esfera interior y la exterior el campo será radial, y el módulo del campo tendrá el mismo valor a una distancia r del centro.
Utilizando el teorema de Gauss, el campo en el exterior de una esfera cargada con carga Q (la esfera interior) es equivalente al campo creado por una carga puntal Q situada en el centro de la esfera. El potencial en un punto externo también tiene la misma expresión que para una carga puntual; la expresión del potencial respecto al infinito como referencia se puede deducir partiendo de la ley de Coulomb y relaciones potencial, energía potencial, trabajo, fuerza y campo



http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/esfera1/esfera1.htm

$$\Delta V = V(r) - \cancel{V(\infty)} = \frac{E_p(r) - \cancel{E_p(\infty)}}{q} = \frac{-W_{FC\,\infty\to r}}{q} = \frac{-\int_\infty^r \vec{F}\,d\vec{r}}{q} = \int_r^\infty \vec{E}\,d\vec{r} = \int_r^\infty E\,dr$$
$$\int_r^\infty K\frac{Q}{r^2}dr = KQ\left[\frac{-1}{r}\right]_r^\infty = K\frac{Q}{r}$$

Hay que usar superposición, pero esa expresión solo es para el potencial de un punto exterior a la esfera interior, no para un punto interior a la esfera exterior.
Para calcular la diferencia de potencial entre las placas hay que integrar entre a y b

$$\Delta V = V(b) - V(a) = \frac{E_p(b) - E_p(a)}{q} = \frac{-W_{FC\,a\to b}}{q} = \frac{-\int_a^b \vec{F}\,d\vec{r}}{q} = \int_a^b \vec{E}\,d\vec{r} = \int_{r=a}^{r=b} E\,dr$$
$$\int_a^b K\frac{Q}{r^2}dr = KQ\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b = KQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Sustituyendo numéricamente

$$\Delta V = KQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=9\cdot 10^{9}\cdot(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 6{,}022\cdot 10^{23})\left(\frac{1}{0{,}1}-\frac{1}{0{,}2}\right)$$

$$\Delta V=4{,}3\cdot 10^{15}\,V$$

b) $$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{\cancel{Q}}{K\cancel{Q}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{ab}{K(b-a)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{9\cdot 10^{9}(0{,}2-0{,}1)}=2{,}2\cdot 10^{-11}F=22\,pF$$

c) La expresión de la energía almacenada en un condensador es $U=\frac{1}{2}CV^2$, expresión que podemos deducir

$$U=QV\Rightarrow dU=V\,dQ=\frac{Q}{C}dQ$$

$$U=\int_0^Q\frac{Q}{C}dQ=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}V\,Q=\frac{1}{2}C\,V^2$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot 2{,}2\cdot 10^{-11}\cdot(4{,}3\cdot 10^{15})^2=2{,}0\cdot 10^{20}\,J$$

Otras unidades de energía podrían ser: cal, kWh, eV, atm·L

$$U=2{,}0\cdot 10^{20}\cancel{J}\cdot\frac{1\,eV}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cancel{J}}=1{,}3\cdot 10^{39}\,eV \qquad U=2{,}0\cdot 10^{20}\cdot\frac{1\,cal}{4{,}18\cancel{J}}=4{,}8\cdot 10^{19}\,cal$$