2001-A1. En una situació unidimensional, quan una partícula material de masa m que es mou a velocitat v xoca elàsticament contra una altra partícula de masa m' que està en repòs, li transfereix una fracció de la seva energia cinètica igual a $4m \cdot m'/(m+m')^2$.
a) Demosteu-ho.
b) Determineu l'expressió de la fracció d'energia transferida en el cas límit en què la massa m' sigui molt superior a la massa m.
c) Deduiu, de l'expressió de la fracció d'energia transferida en b), una llei aplicable al xoc elàstic de pilotes contra parets quan la trajectoria inicial de la pilota és perpendicular a la paret.
2001-B1. a) Per aplicació de principis fisics corresponents, deduïu la fórmula que dóna la quantitat d'energia cinètica que adquireix una partícula de masa m', que està en repòs, quan rep l'impacte d'una altra partícula de massa m que s'està movent amb una velocitat inicial v en el cas que el xoc sigui perfectament elàstic. Imagineu que la situació és estrictament unidimensional.
b) Indiqueu quina particularitat té la fórmula anterior en el cas de ser m = m'.
c) Deduïu, del resultat b), quina característica ha de tenir un bon moderador de neutrons en un reactor nuclear.

2001-A1. En una situación unidimensional, cuando una partícula material de masa m que se mueve a velocidad v choca elásticamente contra otra partícula de masa m' que está en reposo, le transfiere una fracción de su energía cinética igual a $4m \cdot m'/(m+m')^2$.
a) Demostrar esto.
b) Determinar la expresión de la fracción de energía transferida en el caso límite en el que la masa m' sea muy superior a la masa m.
c) Deducir, de la expresión de la fracción de energía transferida en b), una ley aplicable al choque elástico de pelotas contra paredes cuando la trayectoria inicial de la pelota es perpendicular a la pared.
2001-B1. a) Por aplicación de principios físicos correspondientes, deduzca la fórmula que da la cantidad de energía cinética que adquiere una partícula de masa m', que está en reposo, cuando recibe el impacto de otra partícula de masa m que se está moviendo con una velocidad inicial v en caso de que el choque sea perfectamente elástico. Imagínese que la situación es estrictamente unidimensional.
b) Indique qué particularidad tiene la fórmula anterior en el caso de ser m = m'.
c) Deducir, del resultado b), qué característica debe tener un buen moderador de neutrones en un reactor nuclear

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/con_mlineal/choques/choques.htm
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Colisiones_de_dos_part%C3%ADculas#Choques_unidimensionales

Los dos problemas son muy similares; se hace primero un tratamiento general para cualquier coeficiente de restitución, no solamente para e=1 asociado a choque elástico, tal y como aparece en la web de física con ordenador de Ángel Franco García.
A. Tomamos sistema de referencia externo a las partículas
Como es una situación unidimensional tomamos eje x en dirección movimiento y signo indicará sentido. Para distinguir velocidades antes y después, se utiliza u para indicar velocidad antes y v para indicar velocidad después, y subíndices 1 y 2 para indicar las dos partículas. Lo que enunciado indica como v, m y m' serán u_1, m_1 y m_2.
Por conservación del momento lineal:

$p_{antes}=m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2$
$p_{después}=m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2$
Igualando $m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2=m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2$
El coeficiente de restitución nos indica cuanta energía cinética se transmite en el choque / cuanta energía se pierde en el choque entre dos objetos.
Se puede definir como el cociente entre la velocidad relativa de alejamiento de los objetos tras el choque y la velocidad relativa de acercamiento de los objetos antes del choque:
- Si el cociente es 1, es una colisión perfectamente elástica, se conserva Ec.
- Si el cociente es 0 es perfectamente inelástica (los objetos se juntan y parte Ec se pierde en calor).

$$Coeficiente\,restitución=\frac{v_{relativa\,alejamiento\,tras\,choque}}{v_{relativa\,acercamiento\,antes\,choque}}=\frac{v_{2f}-v_{1f}}{-(v_{2i}-v_{1i})}$$

En este caso $e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}$

Como queremos las expresiones de las velocidades tras el choque, las despejamos en ambas expresiones

$$v_1=\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2-m_2\cdot v_2}{m_1}=\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2-m_2\cdot v_1-m_2 e(u_1-u_2)}{m_1}$$

$v_2=v_1+e(u_1-u_2)$

$$m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_1=(m_1-e\,m_2)u_1+m_2(1+e)u_2$$

$$v_1=\frac{(m_1-e\,m_2)u_1+m_2(1+e)u_2}{m_1+m_2}$$

$$v_2=\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2-m_1\cdot v_1}{m_2}=\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2-m_1\cdot v_2+m_1 e(u_1-u_2)}{m_2}$$

$v_1=v_2-e(u_1-u_2)$

$$m_1\cdot v_2+m_2\cdot v_2=m_1(1+e)u_1+(-em_1+m_2)u_2$$

$$v_2=\frac{m_1(1+e)u_1+(m_2-e\,m_1)u_2}{m_1+m_2}$$

Como se trata de un choque, la velocidad del centro de masas del sistema permanece constante

$$v_{CM}=\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$$

Se puede operar

$$v_1=\frac{(m_1-e\,m_2)u_1-m_1(1+e)u_1+m_1(1+e)u_1+m_2(1+e)u_2}{m_1+m_2}=(1+e)v_{CM}-e\,u_1$$

$$v_2=\frac{m_1(1+e)u_1+m_2(1+e)u_2-m_2(1+e)u_2+(m_2-e\,m_1)u_2}{m_1+m_2}=(1+e)v_{CM}-e\,u_2$$

B. Tomamos sistema de referencia en el centro de masas

$$u_{1CM}=u_1-v_{CM}=u_1-\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2\cdot(u_1-u_2)}{m_1+m_2}$$

$$u_{2CM}=u_2-v_{CM}=u_2-\frac{m_1\cdot u_1+m_2\cdot u_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1\cdot(u_2-u_1)}{m_1+m_2}$$

$$v_{1CM}=v_1-v_{CM}=(1+e)v_{CM}-e\,u_1-v_{CM}=e\,v_{CM}-e\,u_1=-e(u_1-v_{CM})=-e\,u_{1CM}$$

$$v_{2CM}=v_2-v_{CM}=(1+e)v_{CM}-e\,u_2-v_{CM}=e\,v_{CM}-e\,u_2=-e(u_2-v_{CM})=-e\,u_{2CM}$$

Tenemos que expresar la fracción de energía cinética transferida, usamos las expresiones respecto centro de masas que son más sencillas

$$Fracción\,E_c\,perdida=\frac{E_c\,inicial-E_c\,final}{E_c\,inicial}$$

$$E_c\,inicial=\frac{1}{2}m_1u_{1CM}^2+\frac{1}{2}m_2u_{2CM}^2=\frac{1}{2}(m_1\left(\frac{m_2\cdot(u_1-u_2)}{m_1+m_2}\right)^2+m_2\left(\frac{m_1\cdot(u_2-u_1)}{m_1+m_2}\right)^2)$$

$$E_c\,inicial=\frac{(m_1m_2)}{2}\frac{(u_1-u_2)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(m_1+m_2)}$$

$$E_c\,final=\frac{1}{2}m_1v_{1CM}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2CM}^2=\frac{1}{2}(m_1\left(\frac{-e\,m_2\cdot(u_1-u_2)}{m_1+m_2}\right)^2+m_2\left(\frac{-e\,m_1\cdot(u_2-u_1)}{m_1+m_2}\right)^2)$$

$$E_c\,inicial=\frac{(m_1m_2)}{2}e^2\frac{(u_1-u_2)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\cancel{(m_1+m_2)}=e^2\cdot E_c\,inicial$$

$$Fracción\,E_c\,perdida=1-e^2$$

Validación física: si e=1, el choque es elástico y no se pierde energía cinética. Si e=0, el choque es inelástico y se pierde la energía cinética.

Tanto 2001-A1 como 2001-B1 son casos con $u_2=0$, $u_1=v$, $m_1=m$, $m_2=m'$, e=1 (choque elástico)

$$v_1=(1+1)v_{CM}-1\cdot u_1=2\frac{m_1\cdot u_1}{m_1+m_2}-u_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1$$

$$v_2=(1+1)v_{CM}-1\cdot 0=2\frac{m_1\cdot u_1}{m_1+m_2}$$

2001-A1

a) Enunciado indica "le transfiere una fracción de su energía cinética", luego hay que calcular la energía inicial de la primera bola, y la energía final de la segunda, que es la que se le transfiere ya que inicialmente estaba en reposo.
Las energías las planteamos respecto al sistema de referencia externo al sistema.

$$E_c\,inicial\,m_1=\frac{1}{2}m_1u_1^2 \qquad E_c\,final\,m_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_2\left(2\frac{m_1\cdot u_1}{m_1+m_2}\right)^2$$

El cociente entre ambas es $\frac{E_{transferida}m_2}{E_{inicial}m_1}=\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\frac{2^2m_2m_1^{\cancel{2}}\cancel{u_1^2}}{(m_1+m_2)^2}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m_1}\cancel{u_1^2}}=\frac{4m_1\cdot m_2}{(m_1+m_2)^2}$

Si cambiamos $u_1=v$, $m_1=m$, $m_2=m'$, se obtiene la expresión del enunciado

b) Si m' >> m ($m_2 >> m_1$), $m_1+m_2\approx m_2$, $m_1/m_2\approx 0$ $\quad \frac{E_{transferida}m_2}{E_{inicial}m_1}=\frac{4m_1\cdot m_2}{(m_1+m_2)^2}\approx\frac{4m_1\cdot m_2}{m_2^2}=4\frac{m_1}{m_2}\approx 0$

No se transfiere energía, porque toda la energía la conserva la partícula inicial, que sale rebotada con misma velocidad pero sentido opuesto. $v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1\approx\frac{-m_2}{m_2}u_1=-u_1$

c) La ley deducida que cuando la pelota impacta sobre una pared, durante el choque la componente paralela a la pared no es alterada, y la componente perpendicular a la pared cambia de sentido en el choque, por lo que ángulo de incidencia es igual a ángulo reflejado.

2001-B1

a) Se ha realizado la deducción de manera general, en este caso se piede la energía cinética adquirida, por lo que la expresión solicitada es

$$E_c\,final\,m_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_2\left(2\frac{m_1\cdot u_1}{m_1+m_2}\right)^2=\frac{2m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}u_1^2$$

Si cambiamos $u_1=v$, $m_1=m$, $m_2=m'$, se obtiene la expresión que pide el enunciado

$$E_c final\, m' = \frac{2m' m^2}{(m+m')^2} v^2$$

b) En el caso de m=m'

$$E_c final\, m' = \frac{2m^3}{(2m)^2} v^2 = \frac{2m^3}{4\cancel{m^2}} v^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

La peculiaridad de este caso es que energía cinética adquirida es igual a la de la partícula incidente. La partícula que choca se queda en reposo, y la que recibe el choque sale con la misma velocidad; es algo que ocurre en billar y en la “cuna de Newton”.

c) En un moderador nuclear el objetivo es frenar a los neutrones; los neutrones serían m y los átomos/núcleos del moderador m'. Como un buen moderador debe frenar mucho los electrones, el objetivo es que la energía cinética transferida sea alta, y eso implica que la masa atómico de los átomos sea baja, ya que si es alta rebotarán y no realizará frenado.