enrique@fiquipedia.es

2. Una boia de forma cúbica i de 20 cm de costat, té una densitat d=0,7 g/cm^3 i es troba surant sobre la superficie de l'aigua (d=1 g/cm^3) d'un embassament. Si l'empenyem endisant-la 5 cm per davall la seva posició d'equilibri i després la deixam en llibertat per a que oscil·li, calcula: el període d'oscil·lació i la velocitat màxima que adquireix.

Una boya de forma cúbica y de 20 cm de lado, tiene una densidad d=0,7 g/cm^3 y se encuentra flotando sobre la superficie del agua (d=1 g/cm^3) de un embalse. Si la empujamos adentrándola 5 cm por debajo su posición de equilibrio y luego la dejamos en libertad para que oscile, calcula: el período de oscilación y la velocidad máxima que adquiere.

Similar a Madrid 1996-2
Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/estatica/boya/boya.htm
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Oscilaciones_de_un_cuerpo_parcialmente_sumergido

Primero calculamos la posición de equilibrio de la boya: qué parte está sumergida.
Llamamos h a la porción de boya que está dentro del agua.
En equilibrio Peso=Empuje

$$V_{boya} \cdot \rho_{boya} \cdot \cancel{g} = V_{sumergido} \cdot \rho_{líquido} \cancel{g}$$

$$\cancel{S_{base}} \cdot 0{,}2 \cdot 700 = \cancel{S_{base}} \cdot h \cdot 1000$$

$$h = \frac{0{,}2 \cdot 700}{1000} = 0{,}14\, m = 14\, cm$$

Si la boya se adentra 5 cm por debajo de su posición de equilibrio, todavía queda 1 cm por encima del nivel del agua. Asumiendo que no hay pérdidas, tenemos un movimiento armónico simple con amplitud 5 cm. Para calcular el período de oscilación necesitamos calcular el valor de la fuerza recuperadora.
Estando 5 cm sumergido, el empuje menos el peso, que es la fuerza recuperadora, es máximo
Tomamos eje x vertical con x positivas hacia arriba, llamamos x a la posición del extremo inferior de la boya, siendo x=0 la posición de equilibrio.
La parte sumergida de la boya en un instante cualquiera es h-x; en t=0 x=-5 cm y está sumergida 19 cm.
Planteamos dinámicamente

$$-V_{boya} \cdot \rho_{boya} \cdot g + V_{sumergido} \cdot \rho_{líquido} \cdot g = V_{boya} \cdot \rho_{boya} \cdot a$$

$$-0{,}2^2 \cdot 0{,}2 \cdot 700 \cdot 9{,}8 + 0{,}2^2 \cdot (0{,}14 - x) \cdot 1000 \cdot 9{,}8 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}2 \cdot 700 \cdot a$$

$$-54{,}88 + 54{,}88 - 392\, x = 5{,}6\, a$$

$$a = -70\, x \Rightarrow a = -\omega^2 x \Rightarrow \omega^2 = 70 \Rightarrow \omega = \sqrt{70}\, rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{70}} \approx 0{,}75\, s$$

El movimiento oscilatorio tendrá una expresión, siendo x=0 la posición de equibrio

$$x(t) = -A\cos(\omega t) = -5\cos(\sqrt{70}\, t)\, [x\, en\, cm, t\, en\, s]$$

La velocidad de oscilación es $v(t) = A\omega\, sen(\omega t) = 5\sqrt{70}\, sen(\sqrt{70}\, t)\, [v\, en\, cm/s, t\, en\, s]$
La velocidad máxima de oscilación será $v_{máx} = 5\sqrt{70} \approx 41{,}8\, cm/s$