OPCIÓN B. PROBLEMA DE FÍSICA.
2. Un punto material de masa m_1=0,1 kg se mueve en un plano horizontal liso con velocidad constante v_1=10 m/s, en dirección perpendicular a una varilla homogénea de masa m_2=1 kg y longitud l=1 m, situada en el mismo plano horizontal, con la que choca a una distancia x=0,2 m de su punto medio.
Momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular en su punto medio: (1/12) ml^2
a.- Calcule las velocidades del punto material y del centro de masas de la varilla después del choque, en los casos siguientes:
*Choque inelástico (2 PUNTOS)
*Choque perfectamente elástico (2 PUNTOS)
b.- ¿Qué condición general tiene que cumplir un sólido rígido para que su momento angular L_0 y su velocidad angular ω tengan la misma dirección? (1 PUNTO)

Referencias
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_//solido/conservacion/varilla/varilla.html
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/teoria/teoria.htm
Problemas con choques/ coeficiente de restitución 2001 Cataluña A1

a) Planteamos la conservación del momento lineal y del momento angular.
Tomamos eje x en el sentido de movimiento de la varilla, y ángulos medidos respecto al centro de masas de la varilla, crecientes en el sentido contrario a las agujas del reloj.
***Choque inelástico:** la masa 1 queda pegada a la varilla
Conservación de momento lineal

$$p_{antes}=p_{después}$$
$$m_1\cdot v_{1antes}+m_2\cdot v_{CM2antes}=(m_1+m_2)v_{CM1+2después}$$
$$0{,}1\cdot 10+\cancel{1\cdot 0}=(0{,}1+1)v_{CM1+2después}\Rightarrow v_{CM1+2después}=\frac{1}{1{,}1}=\frac{10}{11}m/s\approx 0{,}91\,m/s$$

El centro de masas está ahora desplazado respecto al centro de la barra

$$x_{CM}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}1+0\cdot 1}{0{,}1+1}=\frac{0{,}02}{1{,}1}=\frac{2}{110}=\frac{1}{55}m\approx 0{,}018\,m$$

Conservación de momento angular: tomamos momentos respecto al nuevo centro de masas que será el centro de giro

$$L_{antes}=L_{después}$$
$$r_{CM1+2después}\cdot m_1\cdot v_{1antes}+r_{CM1+2después}\cdot m_2\cdot v_{CM2antes}=I_{barra+bala}\cdot\omega$$

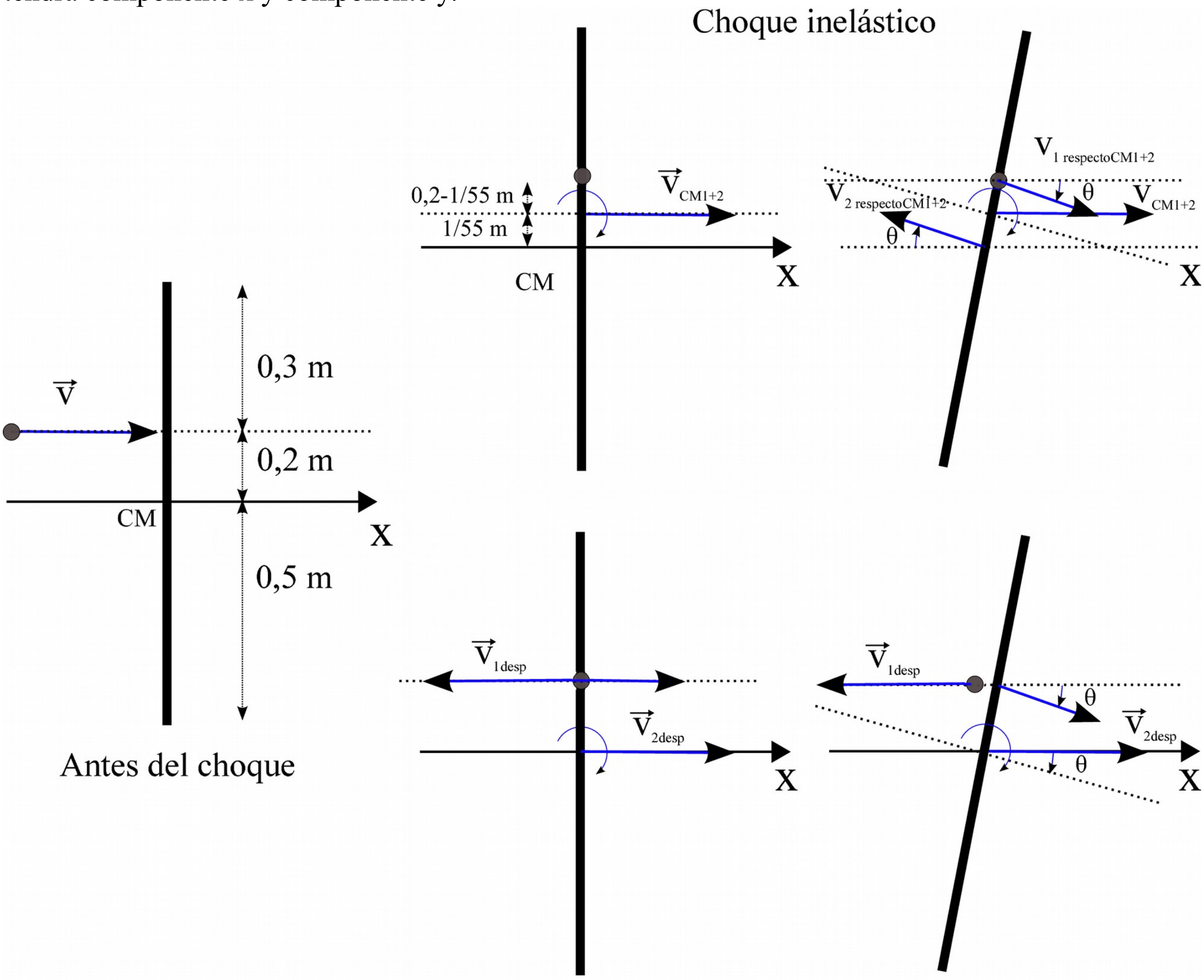
El momento de inercia de la barra respecto al nuevo centro de masas lo calculamos utilizando el teorema de Steiner

$$I_{CM1+2después}=I_{CM}+m_2d^2=\frac{1}{12}m_2l^2+m_2d^2=\frac{1}{12}\cdot 1\cdot 1^2+1\cdot\frac{1}{55^2}=\frac{3025+12}{12\cdot 3025}=\frac{3037}{36300}\approx 0{,}083664\,kg\,m^2$$

La masa puntual no está en el centro de rotación y contribuye al momento de inercia, y a ser masa puntual el momento de inercia es m·d^2 siendo d la distancia al eje.

$$L_{antes}=L_{después}$$
$$(0{,}2-\frac{1}{55})\cdot 0{,}1\cdot 10+\frac{1}{55}\cancel{\cdot 1\cdot 0}=\left(\frac{3037}{36300}+0{,}1\cdot(0{,}2-\frac{1}{55})^2\right)\omega$$
$$\frac{11}{55}=\left(\frac{3037}{36300}+\frac{121}{30250}\right)\cdot\omega\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{15911}{181500}\omega\Rightarrow\omega=\frac{181500}{5\cdot 15911}=\frac{36300}{15911}\approx 2{,}2814\,rad/s$$

Se pide el movimiento del punto material y del centro de masas de la varilla, que serán una composición de movimientos de traslación y rotación. El movimiento no será solamente en eje x, tendrá componente x y componente y.



Choque perfectamente elástico

La barra tiene una velocidad angular de giro constante, por lo que describe un MCU $\theta=\theta_0+\omega t$, y con nuestra referencia el ángulo inicial es 0 y el ángulo es creciente con el tiempo $\theta=\omega t$

Para la barra (la distancia al centro de masas es 1/55 m)

$$v_{x\,CM\,2\,después}=v_{x\,CM\,1+2\,después}+r_{2\,a\,CM\,1+2}\cdot\omega\cdot(-\cos(\theta))$$

$$v_{x\,CM\,1\,después}=\frac{10}{11}-\frac{1}{55}\cdot\frac{36300}{15911}\cdot\cos\left(\frac{36300}{15911}t\right)[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

$$v_{y\,CM\,2\,después}=v_{y\,CM\,1+2\,después}+r_{2\,a\,CM\,1+2}\cdot\omega\cdot sen(\theta)$$

$$v_{y\,CM\,1\,después}=\frac{1}{55}\cdot\frac{36300}{15911}\cdot sen\left(\frac{36300}{15911}t\right)[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

Validación física:

En t=0 la velocidad y es cero, e inicialmente $v_y>0$

En t=0 la velocidad x del CM de la barra es ligeramente inferior a la del CM global

Para el punto material (la distancia al centro de masas es 0,2-1/55 m)

$$v_{x\,CM\,1\,después}=v_{x\,CM\,1+2\,después}+r_{1\,a\,CM\,1+2}\cdot\omega\cdot\cos(\theta)$$

$$v_{x\,CM\,1\,después}=\frac{10}{11}+\left(0{,}2-\frac{1}{55}\right)\cdot\frac{36300}{15911}\cdot\cos\left(\frac{36300}{15911}t\right)[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

$$v_{yCM1después}=v_{yCM1+2después}+r_{1aCM1+2}\cdot\omega\cdot(-sen(\theta))$$
$$v_{yCM1después}=-(0{,}2-\frac{1}{55})\cdot\frac{36300}{15911}\cdot sen(\frac{36300}{15911}t)[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

Validación física:
En t=0 la velocidad y es cero, e inicialmente $v_y<0$
En t=0 la velocidad x del CM de la bala es ligeramente superior a la del CM global
***Choque perfectamente elástico:** se conserva energía cinética, el coeficiente de restitución es 1, la velocidad relativa de acercamiento antes del choque es la misma que la velocidad relativa de alejamiento tras el choque. El acercamiento y alejamiento es entre la masa puntual y el punto de la barra en el que se produce el choque.
Conservación de momento lineal
$$p_{antes}=p_{después}$$
$$m_1\cdot v_{1antes}+m_2\cdot v_{CM2antes}=m_1\cdot v_{1después}+m_2\cdot v_{CM2después}$$
$$0{,}1\cdot 10+\cancel{1\cdot 0}=0{,}1\cdot v_{1después}+1\cdot v_{CM2después}$$
Conservación de momento angular: tomamos momentos respecto al centro de masas de la barra
$$L_{antes}=L_{después}$$
$$r_1\cdot m_1\cdot v_{1antes}+r_2\cdot m_2\cdot v_{CM2antes}=r_1\cdot m_1\cdot v_{1después}+I_{barra}\cdot\omega$$
$$0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 10+\cancel{0\cdot 1\cdot 0}=0{,}2\cdot 0{,}1\cdot v_{1después}+\frac{1}{2}m_2 l^2\omega$$
Choque elástico y coeficiente de restitución:
$$velocidad\,relativa\,acercamiento: v_{1antes}-0$$
$$velocidad\,relativa\,alejamiento: v_{CM2después}+r_{1aCM}\cdot\omega-v_{1después}$$
Como el coeficiente de restitución es 1, tenemos
$$10=v_{CM2después}+0{,}2\cdot\omega-v_{1después}$$
Tenemos 3 ecuaciones con tres incógnitas
$$1=0{,}1\cdot v_{1después}+v_{CM2después}$$
$$0{,}2=0{,}02\cdot v_{1después}+0{,}5\,\omega$$
$$10=-v_{1después}+v_{CM2después}+0{,}2\cdot\omega$$
Sumamos la 2ª multiplicada por 2 y la 3ª multiplicada por -5 para eliminar omega
$$1=0{,}1\cdot v_{1después}+v_{CM2después}$$
$$-49{,}6=5{,}04\cdot v_{1después}-5v_{CM2después}$$
Sumamos multiplicando la primera por 5 para eliminar la velocidad del CM 2
$$-44{,}6=5{,}54\cdot v_{1después}\Rightarrow v_{1después}=\frac{-44{,}6}{5{,}54}\approx-8{,}05\,m/s$$
Sustituyendo en la primera
$$1=0{,}1\cdot\frac{(-44{,}6)}{5{,}54}+v_{CM2después}\Rightarrow v_{CM2después}=1+0{,}1\cdot\frac{44{,}6}{5{,}54}\approx 1{,}81\,m/s$$
Sustituyendo en la segunda
$$0{,}2=0{,}02\cdot\frac{(-44{,}6)}{5{,}54}+0{,}5\,\omega\Rightarrow\omega=\frac{0{,}2+0{,}02\cdot\frac{44{,}6}{5{,}54}}{0{,}5}\approx 0{,}72\,rad/s$$
b) La condición a cumplir por un sólido rígido para que su momento angular y su velocidad angular tengan la misma dirección es que el sólido gire respecto a un eje principal de inercia. Se puede demostrar que cualquier sólido rígido independientemente de su forma hay al menos tres ejes de inercia perpendiculares entre sí.