OPCIÓN A. PROBLEMA DE FÍSICA.

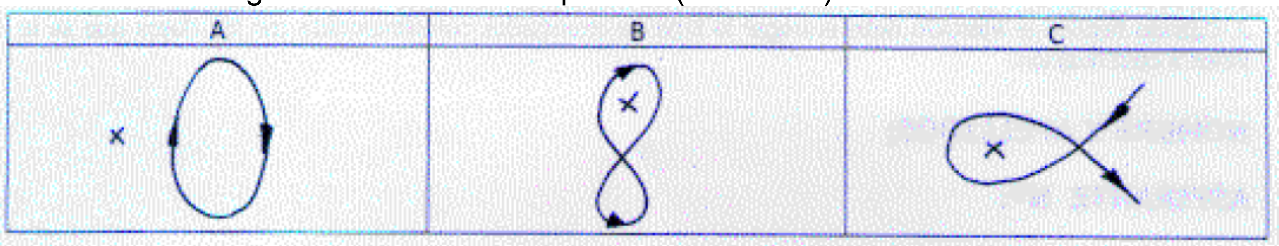
2. Un punto material P de masa 2 kg está situado sobre una superficie horizontal pulida a una distancia de 0,5 m de un punto fijo O, al que se encuentra unido por medio de un hilo elástico de constante K=490 N/m, y cuya longitud indeformada es de 1 m. Si se pone en movimiento el punto material imprimiéndole una velocidad v_0 perpendicular a la dirección definida por OP, determinar:

a.- El módulo de v_0 para que la distancia OP alcance el valor máximo de 1,5 m. (2,5 PUNTOS)

b.- El radio de curvatura de la trayectoria seguida por el punto material cuando OP valga 1,5 m (0,5 PUNTOS)

c.- ¿Se trata de una fuerza conservativa la que actúa sobre el punto material dentro de los límites de elasticidad del hilo elástico?. Fundamente la respuesta con las demostraciones pertinentes. (1 PUNTO)

d.- De entre las siguientes curvas planas ¿Cuáles pueden constituir la trayectoria descrita por un punto material sometido a una fuerza adecuada, del tipo a la que está sometido el punto material del problema, sabiendo que el centro de fuerzas está situado en el punto indicado en el diagrama? Razona la respuesta. (1 PUNTO)



Referencias:
Fuerzas centrales 2003 Galicia F1
Movimiento Bajo la Acción de una Fuerza Central, Mario I. Caicedo, Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, *http://www.fis.usb.ve/~mcaicedo/education/fisica2/mov-en-fuerzas-centrales.pdf*
Universidad de Córdoba, Manuel R. Ortega Girón, Lecciones de física (PDFs gratuitos) *http://www.uco.es/~fa1orgim/fisica/archivos/Lecciones/LFM12.PDF*
Aeronaves y Vehículos Espaciales. Tema 8 – Mecánica Orbital. Ingeniería aeroespacial, Universidad de Sevilla *http://www.aero.us.es/AVE/archivos/Y0910/Tema8.pdf*
Lectura relacionada *http://eltercerprecog.blogspot.com.es/2014/03/y-si-la-fuerza-gravitatoria-aumentase.html*

a) Dado que se indica superficie pulida, podemos plantear conservación de la energía mecánica entre ambos puntos. La superficie es horizontal y no hay variación de energía potencial gravitatoria, pero sí de energía potencial elástica.
Sin embargo no sabemos exactamente el módulo de velocidad en el punto en el que se consiga esa distancia máxima; no podemos pensar que en ese instante la velocidad sea obligatoriamente 0, cosa que ocurriría si el lanzamiento fuera en la línea OP en lugar de perpendicular a ella.
Por la trayectoria que podemos razonar cualitativamente (comienza alejándose y con una trayectoria perpendicular a la línea que une el punto inicial con O) que será del estilo de A, podemos pensar que el punto más alejado de esa cónica tendría la misma velocidad, pero no puede ser así ya que está claro que la energía potencial elástica varía y la mecánica se mantiene constante, luego la cinética no puede ser la misma.
Lo que sí nos puede servir es para acotar el valor de velocidad mínima asociada a lanzarlo en el

sentido de la línea OP: $\frac{1}{2}K\Delta x_{máx}^2=\frac{1}{2}m v_0^2 \Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{490\cdot 0{,}5^2}{2}}=7{,}68\, m/s$

En caso de velocidades en otra dirección como el enunciado será una velocidad mayor.

PLANTEAMIENTO DINÁMICO

Permite obtener la ecuación del movimiento general, y ello nos servirá para responder a siguientes apartados: b radio de curvatura y d trayectoria.

>Incluyo mi planteamiento inicial al ver una K, que luego comento y descarto

En un instante cualquiera, si tomamos r como la distancia respecto punto O a P,

$$F_e=K\cdot(r-r_0)=m\cdot a \rightarrow a=\frac{K}{m}(r-r_0)$$

>Se puede pensar si poner F=-Kr ó F=Kr por lo que validamos signo: inicialmente r_0=0,5 m y r=1 m, y la fuerza será positiva, alejando el punto P.

Pero esta expresión (que es la que me surge plantear inicialmente al ver una K) sería en todo momento en el caso de que fuera un muelle, que desde t=0 está empujando la masa, pero enunciado dice que se trata de un hilo elástico, no muelle.

Al ser un hilo se debe asumir que no hay fuerza elástica hasta que la longitud no es superior a la longitud indeformada del hilo, y hasta que eso ocurre la masa describe simplemente un MRU.

Cuando el hilo alcanza su longitud indeformada, verticalmente ha recorrido

$y=\sqrt{1^2-0{,}5^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m$ de modo que el punto inicial del movimiento en el que está actuando la fuerza elástica es $x_0=0{,}5\,m\,;\, y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}m$

La fuerza elástica ahora siempre está dirigida hacia O hasta que recupere la longitud indeformada y deje de actuar, por lo que ahora

$$F_e=-K\cdot(r-r_{0deform})=m\cdot a \rightarrow a=\frac{-K}{m}(r-r_{0deform})$$

Queremos una expresión de r en función de otra variable, tiempo o ángulo, con lo que derivando obtendremos el máximo

Utilizando polares tomando referencia en punto O y ángulos medidos desde eje x que es la línea OP, se puede llegar a la expresión

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=[\ddot{r}-r\dot{\theta}^2]\vec{u}_r+[2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}]\vec{u}_\theta$$

Donde podemos identificar cualitativamente "(a_{radial} – a_{normal})u_{radial} + ($a_{coriolis}$ + $a_{tangencial}$)$u_{\mathbf{transversal}}$"

Aplicando la 2ª ley de Newton (asumimos masa del hilo despreciable), y teniendo en cuenta que la única fuerza es radial llegamos a

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\frac{-K}{m}(r-r_{0deform})$$

$$2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=0$$

La segunda expresión se puede ver que lleva (se multiplican por "m·r" ambos términos) a

$\frac{d(mr^2\dot{\theta})}{dt}=0$ que lleva a la idea de conservación de momento angular para el caso de fuerzas centrales, ya que $mr^2\dot{\theta}=l=cte$.

Su valor es constante, por lo que podemos calcularlo en cualquier instante, como por ejemplo en el instante inicial, en el que posición y velocidad forman 90º, por lo que $|l|=rmv=|l_0|=r_0\cdot m\cdot v_0$ Si lo hiciéramos para el instante inicial del movimiento en el que el hilo elástico ya realiza fuerza también tendría el mismo valor.

enrique@fiquipedia.es Revisado 4 marzo 2018

Si sustituimos en la primera $\dot{\theta}=\frac{l}{mr^2}$

$$\ddot{r}-r\frac{l^2}{m^2r^4}=\frac{-K}{m}(r-r_{0deform})\Rightarrow\ddot{r}=\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r^3}-\frac{K}{m}(r-r_{0\,deform})$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no lineal

Realizamos un cambio de variable; nos interesa igualar la derivada de r a 0 para buscar un máximo.

$$u=\dot{r}=\frac{dr}{dt}$$

$$\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{du}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{du}{dr}\cdot u$$

Sustituyendo para buscar una ecuación diferencial en función de u separable

$$\frac{du}{dr}\cdot u=\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r^3}-\frac{K}{m}(r-r_{0deform})$$

$$u\,du=\left(\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r^3}-\frac{K}{m}r+\frac{K}{m}r_{0deform}\right)dr$$

$$\int_{u_0}^{u}u\,du=\int_{r_0}^{r}\left(\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r^3}-\frac{K}{m}r+\frac{K}{m}r_{0deform}\right)dr$$

$$\frac{u^2}{2}-\frac{u_0^2}{2}=\frac{l^2}{m^2}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{r^2}\right)-\frac{K}{m}\frac{r^2}{2}+\frac{K}{m}r_{0deform}\,r-\left(\frac{l^2}{m^2}\left(\frac{-1}{2}\frac{1}{r_{0\,deform}^2}\right)-\frac{K}{m}\frac{r_{0deform}^2}{2}+\frac{K}{m}r_{0\,deform}^2\right)$$

$$u^2-u_0^2=\frac{-l^2}{m^2}\frac{1}{r^2}-\frac{K}{m}r^2+2\frac{K}{m}r_{0deform}\,r+\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r_{0deform}^2}-\frac{K}{m}r_{0deform}^2$$

Sustituimos valores numéricos: K=490 N/m, m=2 kg, $r_{0deform}$=1 m,

$l=r_0mv_0=0,5\cdot2\cdot v_0=v_0$ (ó también $r_{0deform}\cdot m\cdot v_0=1\cdot2\cdot v_0\cdot sen(30º)=v_0$)

u_0 es dr/dt, velocidad radial, v_{0r}, y no coincide cuando r_0=0,5 m, que es nula, y cuando $r_{0deform}$=1 m, ya que en ese caso el sentido radial forma 60º con la horizontal y 30º con la velocidad inicial, por lo que $u_0=v_{0r}=v_0\cdot sen(60^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$

Sustituyendo en la expresión **$l=v_0$** y **$u_0^2=(3/4)v_0^2$**

$$u^2=\frac{-v_0^2}{4}\frac{1}{r^2}-245r^2+490r+\frac{v_0^2}{4}-245+\frac{3}{4}v_0^2$$

$$u=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{-v_0^2}{4}\frac{1}{r^2}-245r^2+490r+v_0^2-245}$$

Como buscamos un máximo de r, igualamos a cero la derivada

$$\frac{-v_0^2-980r^4+1960r^3+4v_0^2r^2-980r^2}{4r^2}=0$$

Surge una ecuación de cuarto grado, pero en este caso nos están dando el valor de r máximo, 1,5 m, y nos piden con qué v_0 ocurre, por lo que podemos plantear sustituir para obtener el valor de v_0.

$$v_0^2(4(1,5)^2-1)=980(1,5)^4-1960(1,5)^3+980(1,5)^2$$

$$v_0=\sqrt{\frac{551,25}{8}}\approx8,3\,m/s$$

PLANTEAMIENTO ENERGÉTICO

Al ser una superficie pulida la energía mecánica se conserva $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}K(r-r_{0deform})^2$ y la velocidad es la suma de velocidad radial y transversal $v^2=\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2$. La energía mecánica es la energía cinética inicial, asociada a v_0. Sustituimos utilizando la relación $\dot{\theta}=\frac{l}{mr^2}$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m\left(r\frac{l}{mr^2}\right)^2+\frac{1}{2}K(r-r_{0deform})^2\Rightarrow mv_0^2=m\dot{r}^2+\frac{l^2}{mr^2}+K(r-r_{0deform})^2$$

$$\dot{r}=\sqrt{v_0^2-\frac{l^2}{m^2r^2}-\frac{K}{m}(r-r_{0deform})^2}$$

Sustituyendo valores, la derivada es cero si r=1,5 m

De nuevo sustituyendo valores numéricos y usando lo comentado en planteamiento dinámico $l=v_0$

$$0=\sqrt{v_0^2-\frac{v_0^2}{2^2 1{,}5^2}-\frac{490}{2}(1{,}5-1)^2}\Rightarrow\frac{8}{9}v_0^2=490\cdot\frac{0{,}5^2}{2}\Rightarrow v_0=8{,}3\ m/s$$

b) Para calcular el radio de curvatura instantáneo simplemente usamos

$$a_c=\frac{v^2}{R}=\frac{r^2\omega^2}{R}\Rightarrow R=\frac{r^2\omega^2}{a_c}\quad\text{usando}\quad\omega=\dot{\theta}=\frac{l}{mr^2}\quad\text{y}\quad a_c=\frac{F_{elast}}{m}=\frac{|K\cdot\Delta r|}{m}$$

Donde R es radio de curvatura y r distancia al origen (módulo del vector posición desde el punto donde se mide momento angular):

$$R=r^2\frac{\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2}{\frac{|K\cdot\Delta r|}{m}}\Rightarrow R=\frac{l^2}{r^2m|K\cdot\Delta r|}=\frac{8{,}3^2}{1{,}5^2\cdot 2\cdot 490\cdot 0{,}5}=0{,}0625\,m$$

Vemos que está a 1,5 m del origen, pero el radio es menor, lo que sugiere una trayectoria elíptica siendo 1,5 m el semieje mayor de la elipse.

No es válido en general plantear que al estar a 1,5 m del origen (r=1,5 m) el radio de curvatura sea de 1,5 m (R=1,5 m); eso solamente sería válido si fuese una trayectoria circular. Por el mismo motivo no es válido plantear $a_c=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$ ya que solamente se cumple si R=r. Lo que sí se cumple siempre es $a_c=\frac{v^2}{R}$ y que $v=r\omega$

c) Se trata de una fuerza conservativa ya que solamente depende de la distancia, no hay pérdidas, por lo que el trabajo que realiza para ir de un punto a otro solamente depende de la distancia radial entre ellos. El trabajo es la integral de la fuerza a lo largo de la trayectoria, y si la fuerza solamente depende de r, el trabajo solamente depende de r, y se puede definir un valor de energía potencial asociado a cada distancia r.

d) Cualitativamente podemos pensar:

A se descarta porque son fuerzas centrales, y esa trayectoria cerrada con el punto de fuerzas fuera implicaría fuerzas repulsivas, que no aplican en este caso.

B se descarta porque son fuerzas centrales, y esa trayectoria, en la parte del lazo cerrado que tiene el punto de fuerzas fuera implicaría fuerzas repulsivas, que no aplican en este caso.

C se descarta porque son fuerzas centrales, y esa trayectoria abierta alejándose del punto de fuerzas implicaría fuerzas repulsivas, que no aplican en este caso.

Por lo tanto podemos deducir que no es ninguna de las 3, pero lo demostramos obteniendo la ecuación de la trayectoria.

Validamos en qué puntos en los que dr/dt=0, ahora que sabemos el valor de v_0.

$$-(8{,}3)^2-980r^4+1960r^3+4(8{,}3)^2r^2-980r^2=0$$

$$-980r^4+1960r^3-704{,}44r^2-68{,}89=0$$

Es una ecuación de 4º grado, resolviendo

http://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+-980*x%5E4+%2B1960*x%5E3-704.44*x%5E2-68.89%3D0
tenemos r=0,66 m y r=1,5 m.
Esto parece encajar en que sea una elipse y esos sean sus dos semiejes (por demostrar: quizá podría ser un tramo de parábola o de hipérbola). Sin embargo hay puntos de esa trayectoria elíptica en los que la distancia al centro es menor que 1 m, por lo que no habría fuerza central al ser un hilo. Se puede plantear si una vez que llegue al vértice superior lo que describiría sería una circunferencia con radio 1,5 m; no puede ser una circunferencia porque el radio de curvatura es menor de 1,5 m en ese punto. Una vez que el hilo vuelve a medir 1 m, la situación es similar pero “girada” y describiría otro arco de trayectoria curvada, volviendo de nuevo al círculo de radio 1 m. Se representan unos tramos.
Si intentamos obtener la ecuación de la trayectoria, r(t), la resolución no es trivial. Se incluyen referencias, habría que plantearlo usando polares, separando tramos de trayectorias
Se incluye un diagrama orientativo, pendiente de revisar