C2. L'equació d'una ona mecànica estacionària és:

$$\xi=6\cdot\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\cos 30\pi t \quad \text{(unitats SI)}$$

a) Determineu l'amplitud i la velocitat de les ones planes que l'han originada.
b) Determineu la distància entre dos nodes consecutius de l'ona estacionària.
c) Determineu la velocitat amb què, en cada instant, oscil·la una partícula del medi situada en el punt d'abscissa x = 3 cm per culpa de l'acció de l'ona estacionària.
d) Les ones longitudinals, poden generar ones estacionàries? O bé aquestes han de ser forçosament originades per ones transversals?

La ecuación de una onda mecánica estacionaria es:

$$\xi=6\cdot\cos\frac{\pi}{2}x\cdot\cos 30\pi t \quad \textit{(unidades SI)}$$

a) Determinar la amplitud y la velocidad de las ondas planas que lo han originado.
b) Determine la distancia entre dos nodos consecutivos de la onda estacionaria.
c) Determinar la velocidad con la que, en cada instante, oscila una partícula del medio situada en el punto de abscisa x = 3 cm por culpa de la acción de la onda estacionaria.
d) Las ondas longitudinales, pueden generar ondas estacionarias? O bien éstas deben ser forzosamente originadas por ondas transversales?

a) Una onda estacionaria es el resultado de la interferencia de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos y con la misma amplitud, de modo que la amplitud máxima es el doble de la amplitud de cada una de ellas, por lo que la amplitud original era de 3 (unidades SI de la perturbación, puede ser distancia, presión...).
Si pensamos la expresión trigonométrica asociada a suma y resta donde en el resultado aparece el producto de cosenos que es la forma en la que se aporta en el enunciado

$$\cos(A)+\cos(B)=2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Calculamos el valor de A y de B, que son las expresiones de fase de cada onda.

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}x;\ \frac{A-B}{2}=30\pi t$$

$$Sumando\ 1^o+2^o: A=\frac{\pi}{2}x+30\pi t$$

$$Restando\ 1^o-2^o: B=\frac{\pi}{2}x-30\pi t$$

$$\xi(x,t)=3\cos\left(\frac{\pi}{2}x+30\pi t\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{2}x-30\pi t\right)$$

La expresión habitual es $y(x,t)=A\cos(\omega t\pm k x)$, así que aparentemente tenemos dos ondas con signo positivo delante de kx, lo que indicaría mismo sentido de propagación, pero varía el signo delante de t. Si aplicamos que cos(x)=cos(-x) y reordenamos

$$\xi(x,t)=3\cos\left(30\pi t+\frac{\pi}{2}x\right)+3\cos\left(30\pi t-\frac{\pi}{2}x\right) \quad \text{(unidades SI)}$$

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{30\pi}{\frac{\pi}{2}}=60\,m/s$$

b) Un nodo implica que la amplitud siempre es 0 independientemente de t, lo que ocurre cuando

$$\cos\frac{\pi}{2}x=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}x=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}+n\cdot\pi\cdot\frac{2}{\pi}=1+n\cdot 2$$

Dos nodos consecutivos distan 2 m.
Cualitativamente podíamos haber dicho que la distancia entre nodos es media longitud de onda

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4\,m$$

c) $v_{osc}(x=0{,}03\,m)=\frac{d\xi}{dt}=6\cdot\cos(\frac{\pi}{2}0{,}3)\cdot(-30\pi)sen(30\pi t)=504\,sen(30\pi t)$ (unidades SI)

d) Las ondas longitudinales sí pueden generar ondas estacionarias, que no están forzosamente originadas por ondas transversales. Un ejemplo de onda estacionaria longitudinal es el sonido en el interior de un tubo.