enrique@fiquipedia.es

C1. En el model de Thomson de l'àtom d'hidrogen, l'electró es considerava situat dins d'una esfera de càrrega positiva de radi igual al radi de tot l'átom, a través de la qual podia vibrar sense sortir-se'n, en principi.
a) Determineu l'expressió de la força a què estaria sotmés l'electró en qualsevol punt de l'esfera, en la hipòtesi d'una distribució homogènia de la càrrega positiva. (Adoneu-vos que, per raó de simetria, en càlculs clàssics aquesta força serà la mateixa en totes les direccions radials considerades des del centre de l'esfera). Mireu d'arribar al resultat final expressant-lo estrictament a partir de la posició de l'electró i de constants numèriques.
b) Amb el resultat anterior, mostreu que el moviment possible de l'electró, hipotèticament deixat en repòs en un punt qualsevol de l'esfera diferent del centre, és un moviment harmónic simple, i determineu-ne la freqüència.
c) Comenteu el resultat de b) en relació amb les freqüencies experimentals de l'espectre de l'hidrogen.
Per fer aqueste exercici podeu suposar que la dimensió radial de l'àtom d'hidrogen és d'uns 10^{-10} m

En el modelo de Thomson del átomo de hidrógeno, el electrón se consideraba situado dentro de una esfera de carga positiva de radio igual al radio de todo el átomo, a través de la cual podía vibrar sin salirse, en principio.
a) Determinar la expresión de la fuerza a la que estaría sometido el electrón en cualquier punto de la esfera, en la hipótesis de una distribución homogénea de la carga positiva. (Tenga en cuenta que, en razón de simetría, en cálculos clásicos esta fuerza será la misma en todas las direcciones radiales consideradas desde el centro de la esfera). Debe llegar al resultado final expresándolo estrictamente a partir de la posición del electrón y de constantes numéricas.
b) Con el resultado anterior, muestre que el movimiento posible del electrón, hipotéticamente dejado en reposo en un punto cualquiera de la esfera diferente del centro, es un movimiento armónico simple, y determine su frecuencia.
c) Comente el resultado de b) en relación con las frecuencias experimentales del espectro del hidrógeno.
Para hacer este ejercicio puede suponer que la dimensión radial del átomo de hidrógeno es de unos 10^{-10} m

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/elecmagnet/campo_electrico/atomo/atomo.htm#Movimiento%20del%20electr%C3%B3n%20en%20el%20%C3%A1tomo%20de%20Kelvin-Thomson

a) Con las indicaciones de simetría que indica el enunciado y asumiendo que la esfera tiene una densidad de carga uniforme, podemos utilizar el teorema de Gauss para calcular el valor del campo. Tomamos como superficie una esfera de radio r<R; el vector campo eléctrico será radial y siempre paralelo al vector superficie. Al ser la esfera de carga positiva, el vector campo tendrá sentido hacia fuera.
En el modelo de Thomson no se conocía la existencia de protón, pero usamos como constante e igual a la carga del electrón y protón, el radio del átomo de hidrógeno $R_H=10^{-10}$ m

$$\rho=\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_H^3}\Rightarrow Q_{interna}=\rho\cdot V$$

CC BY

$$\Phi_c=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0}\Rightarrow E\,4\pi r^2=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\frac{e}{\frac{4}{3}\pi R_H^3}}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R_H^3}r$$

El campo en el interior es 0 en el centro y crece linealmente con el radio hasta un valor máximo para $r=R_H$ en el que su valor coincide con el campo genrado por una carga +e puntual a una distancia R_H.
Como se pide la fuerza realizada sobre un electrón, la fuerza sería atractiva, y sería

$$\vec{F}=q\vec{E}=\frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R_H^3}r\,\vec{u}_r$$

b) Un movimiento es armónico simple si la fuerza es 0 en una posición de equilibrio y existe una fuerza recuperadora que lleva a la partícula de equilibrio, cumpliéndose F=-kx, lo que equilvale a $a=-\omega^2 x$ con $k=m\omega^2$
Viendo la expresión de la fuerza del apartado anterior, la fuerza es 0 en el centro (posición de equilibrio) y el valor de fuerza a una distancia r de la posición del equilibrio es proporcional a la distancia, por lo que la constante recuperadora es $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R_H^3}=K\cdot\frac{e^2}{R_H^3}$

La frecuencia será $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K\frac{e^2}{R_H^3}}{m}}=\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{mR_H^3}}$

La frecuencia no depende del punto de la esfera en la que se deje, solamente de la constante recuperadora, y en ella esá la carga y la dimensión de la esfera.
c) Experimentalmente el espectro de hidrógeno tiene un conjunto de frecuencias discretas (series de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett y Pfund), no una única frecuencia.
Además sustituyendo los valores numéricos en la expresión del apartado b

$$f=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\pi}\sqrt{\frac{9\cdot 10^9}{9{,}1\cdot 10^{-31}(10^{-10})^3}}=2{,}53\cdot 10^{15}\,Hz$$

$$\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8}{2{,}53\cdot 10^{15}}=1{,}19\cdot 10^{-7}\,m=119\,nm$$

La frecuencia es alta porque se trata de unas oscilaciones en unas dimensiones muy pequeñas.
El valor de la longitud de onda está fuera del espectro visible (entre unos 400 y 700 nm), una longitud de onda más pequeña implica una frecuncia alta, y está asociada a espectro ultravioleta, dentro de las frecuencias de la serie de Lyman.