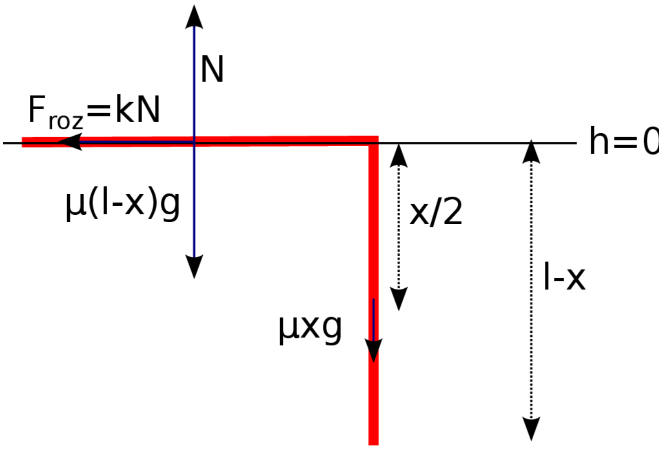
enrique@fiquipedia.es

PROCESOS SELECTIVOS CUERPO PROFESORES DE SECUNDARIA AÑO 2000
PROBLEMAS DE FÍSICA (5 PUNTOS)

Una cuerda homogénea de longitud l y peso por unidad de longitud μ, está apoyada sobre una mesa horizonal rugosa de coeficiente de rozamiento k, de forma que una parte, de dicha cuerda, cuelga libremente por el extremo de la mesa. Determina:
a) (1 punto).- La posición de equilibrio de la cuerda sobre la mesa.
b) (3 puntos).- Si se deja caer la cuerda desde esa posición de equilibrio, ¿qué velocidad llevará la cuerda cuando el extremo que apoya sobre la mesa llegue al borde de la misma?, considerando nulas las pérdidas en forma de calor.
c) (1 punto).- Aplicación: Determina la velocidad para una longitud de cuerda l=1 m y un coeficiente de rozamiento entre cuerda y mesa de k=0,2.

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/cuerda/cuerda.htm
1000 problemas de física general; J.A. Fidalgo, M.R. Fernández, problema 8.47
Cierta relación con Madrid 2012 Física 1

Comentario: enunciado usa μ como "peso" (asumimos que quiere decir masa y no peso) por unidad de longitud y k para coeficiente de rozamiento, cuando lo habitual es usar λ y μ respectivamente. Usamos las letras del enunciado.



a) Llamamos x a la longitud del tramo de cuerda que cuelga de la mesa, y realizamos un diagrama en el que representamos todas las fuerzas.
Globalmente la fuerza a favor del movimiento es la asociada al peso de la masa que cuelga, y la fuerza opuesta al movimiento es la asociada al rozamiento de la masa apoyada en la mesa.
Aplicando la 2ª ley de Newton en condición de equilibrio, con aceleración cero:
Perpendicularmente al sentido del movimiento

$$N-\mu(l-x)g=0 \Rightarrow N=\mu(l-x)g$$

En el sentido del movimiento

$$-k\cancel{\mu}(l-x)\cancel{g}+\cancel{\mu}\cdot x\cdot \cancel{g}=0$$

$$-kl+kx+x=0$$

$$x=\frac{kl}{k+1}$$

b) Enunciado indica "considerando nulas las pérdidas en forma de calor" lo que resulta extraño, ya que el rozamiento supone pérdidas por calor, y se ha considerado en apartado a.
Como resulta raro que aquí no se considere rozamiento se hace de dos maneras:
-Sin rozamiento, que solamente aparece en la expresión de lo posición de equilibrio de apartado a).
-Con rozamiento.
Cada uno de los dos casos (sin y con rozamiento) lo resolvemos de dos maneras:
Sin rozamiento
Planteamiento dinámico, en el sentido del movimiento

$$\cancel{\mu}\cdot x\cdot g=\cancel{\mu}\, l\, a$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{g}{l}x \qquad \int_0^v v\,dv=\frac{g}{l}\int_{x_i}^{x_f} x\,dx$$

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{g}{l}x \qquad \frac{v^2}{2}=\frac{g}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$v\,dv=\frac{g}{l}x\,dx$$

En este caso x_i es el valor de equilibrio del apartado a, y x_f=l. Sustityendo

$$\frac{v^2}{2}=\frac{g}{2l}\left(l^2-\frac{k^2l^2}{(k+1)^2}\right)$$

$$v^2=g\,l(1-\frac{k^2}{(k+1)^2})=gl\frac{(k+1)^2-k^2}{(k+1)^2}=gl\frac{k^2+2k+1-k^2}{(k+1)^2}=gl\frac{(1+2k)}{(k+1)^2}$$

$$v=\frac{\sqrt{gl(1+2k)}}{(k+1)}$$

Plateamiento energético.

Al no haber rozamiento se conserva la energía mecánica. Llamamos A a la situación de partida y B a la situación final de la que queremos averiguar la velocidad.

Tomamos referencia de energía potencial en la superficie de la mesa

A: Ec=0, $E_p=m\cdot g\cdot h=\mu\, x_0\cdot g\cdot(\frac{-x_0}{2})=-\mu\frac{g}{2}\frac{k^2l^2}{(k+1)^2}$

B: Ec= ½ mv^2 =½ μlv^2 , $E_p=m\cdot g\cdot h=\mu\, l\cdot g\cdot(\frac{-l}{2})=-\mu\frac{g}{2}l^2$

Igualando

$$-\cancel{\mu}\frac{g}{\cancel{2}}\frac{k^2l^2}{(k+1)^2}=\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\mu}\, l\, v^2-\cancel{\mu}\frac{g}{\cancel{2}}l^2$$

$$v^2=\frac{g}{l}(l^2-\frac{k^2l^2}{(k+1)^2})$$

Llegamos a la misma expresión

Con rozamiento

Planteamiento dinámico

$$-k\cancel{\mu}(l-x)g+\cancel{\mu}\cdot x\cdot g=\cancel{\mu}\, l\, a$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{g}{l}(x-kl+kx) \qquad \int_0^v v\,dv=\frac{g}{l}\int_{x_i}^{x_f}(x(k+1)-kl)dx$$

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{g}{l}(x(k+1)-kl) \qquad \frac{v^2}{2}=\frac{g}{l}\left[\frac{x^2}{2}(k+1)-x\,kl\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$v\,dv=\frac{g}{l}(x(k+1)-kl)dx$$

De nuevo x_i es el valor de equilibrio del apartado a, y x_f=l. Sustityendo

$$\frac{v^2}{2}=\frac{g}{l}\left(\frac{l^2}{2}(k+1)-kl^2-(\frac{k^2l^2}{2(k+1)^2}(k+1)-\frac{kl}{(x+1)}kl)\right)$$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{g}{l}\left(l^2\frac{(k+1-2k)}{2}+\frac{k^2l^2}{2(k+1)}\right)\Rightarrow v^2=gl\left(\frac{(1-k)(k+1)+k^2}{k+1}\right)=gl\left(\frac{1-k^2+k^2}{k+1}\right)$$

$$v^2=\frac{gl}{k+1}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{gl}{k+1}}$$

Plateamiento energético.
Al haber rozamiento no se conserva la energía mecánica. Llamamos A a la situación de partida y B a la situación final de la que queremos averiguar la velocidad.
Con misma referencia, las energías en A y B son las mismas
Ahora debemos plantear el teorema de las fuerzas vivas o bien que la diferencia de energía potencial es igual al trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, que acaban siendo equivalentes. La fuerza no conservativa es el rozamiento $F_{roz}=-k\mu(l-x)g$

$$\Delta E_m = W_{F\,no\,conservativas}$$

$$\frac{1}{2}\mu l v^2-\mu\frac{g}{2}l^2-\left(-\mu\frac{g}{2}\frac{k^2l^2}{(k+1)^2}\right)=\int_{x_i}^{x_f}-k\mu(l-x)g$$

$$\frac{l}{2}v^2=\frac{g}{2}l^2-\frac{g}{2}l^2\frac{k^2}{(k+1)^2}-gk\left[xl-\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_f}$$

En este caso la integración cualitativamente se hace sobre la longitud de la cuerda apoyada, pero es el mismo recorrido que en la integración anterior en la que se hacía con la cuerda colgada, ya que la cuerda avanza lo mismo. Tomamos x_i como la posición de equilibrio de apartado a y x_f=l.
Sustituyendo

$$\frac{l}{2}v^2=\frac{g}{2}l^2-\frac{g}{2}l^2\frac{k^2}{(k+1)^2}-gk\left(l^2-\frac{l^2}{2}-\frac{kl^2}{k+1}+\frac{1}{2}\frac{k^2l^2}{(k+1)^2}\right)$$

$$v^2=gl-gl\frac{k^2}{(k+1)^2}-glk+2gl\frac{k^2}{k+1}-gl\frac{k^3}{(k+1)^2}$$

$$v^2=gl\frac{(k+1)^2-k^2-k(k+1)^2+2k^2(k+1)-k^3}{(k+1)^2}$$ Llegamos a la misma expresión

$$v^2=gl\frac{k^2+2k+1-k^2-k^3-2k^2-k+2k^3+2k^2-k^3}{(k+1)^2}$$

$$v^2=gl\frac{k+1}{(k+1)^2}=\frac{gl}{k+1}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{gl}{k+1}}$$

c) Sustituyendo valores (el valor de g no está en el enunciado, asumimos 9,8 m/s^2)
Sin rozamiento

$$v=\frac{\sqrt{9{,}8\cdot 1(1+2\cdot 0{,}2)}}{(0{,}2+1)}=3{,}09\,m/s$$

Con rozamiento

$$v=\sqrt{\frac{9{,}8\cdot 1}{0{,}2+1}}=2{,}86\,m/s$$

Validación física, con rozamiento la velocidad debe ser menor que sin rozamiento.