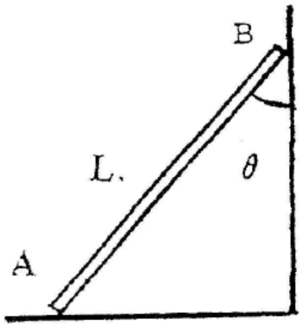
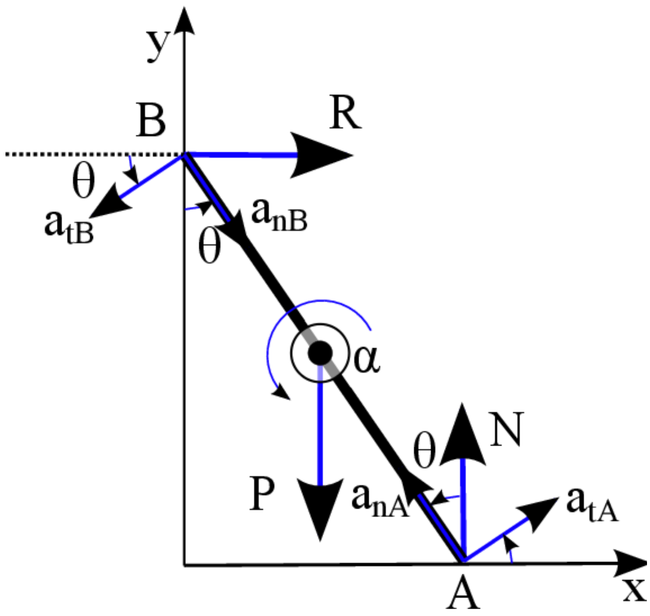
1. Una varilla uniforme de masa M y longitud L parte del reposo en la posición que se indica en la figura. Si el rozamiento con ambas superficies es despreciable, hallar la aceleración angular de la varilla con respecto al eje que pasa por su centro de masas.



Resuelto por sleepylavoisier en http://www.docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=4018#p18725 (incluye resolución con mecánica clásica y con mecánica lagrangiana)

Referencias
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/escalera/escalera.htm
Mecánica para ingeniería: dinámica. Quinta Edición, Bedford y Fowler;Ejemplo activo 18.3

Planteamiento dinámico:



Si la varilla es homogénea su centro de masas está el el centro.
Las fuerzas que actúan sobre la varilla, si no hay rozamiento son:
-Peso, sobre su centro de masas
-Normal realizada por el suelo: N
-Fuerza realizada por la pared: R
Tomamos sistema de referencia: eje x en suelo, y en pared, x positivas en el sentido en el que desliza la varilla.
Planteamos ecuaciones de traslación y rotación
Traslación, por separado en cada eje

$$\Sigma F_x = R = M a_{CMx}$$

$$\Sigma F_y = N - M\cdot g = M a_{CMy}$$

Rotación. Tomamos momentos respecto al centro de la barra
El momento de inercia de la varilla respecto a su centro es (1/12)·M·L²

$$M = I\alpha$$

$$-R\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos\theta + N\cdot\frac{L}{2}\cdot sen\,\theta = \frac{1}{12} M L^2 \alpha$$

Tenemos que relacionar α con las aceleraciones
Para al punto B, mientras haya contacto con la pared, $a_{Bx}=0$

$$a_{Bx} = a_{CMx} - a_{tBx} + a_{nBx} \Rightarrow a_{CMx} = \alpha\frac{L}{2}\cos\theta - \omega^2\frac{L}{2} sen\,\theta = \frac{L}{2}(\alpha\cos\theta - \omega^2 sen\,\theta)$$

Para al punto A, mientras haya contacto con el suelo , $a_{Ay}=0$

$$a_{Ay} = a_{CMy} + a_{tBy} + a_{nBy} \Rightarrow a_{CMy} = -\alpha\frac{L}{2} sen\,\theta - \omega^2\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{-L}{2}(\alpha\, sen\,\theta + \omega^2\cos\theta)$$

Combinamos las tres primeras para despejar α

$$\alpha = \frac{6}{ML}(-R\cos\theta + N\, sen\,\theta) = \frac{6}{\cancel{M}L}(-\cancel{M} a_{CMx}\cos\theta + \cancel{M}(g + a_{CMy}) sen\,\theta)$$

Sustituimos las expresiones de a_{CMx} y de a_{CMy}

$$\alpha=\frac{6}{L}\left(\frac{-L}{2}(\alpha\cos\theta-\omega^2 sen\,\theta)\cos\theta+\left(g-\frac{L}{2}(\alpha\, sen\theta+\omega^2\cos\theta)\right)sen\theta\right)$$

$$\alpha=-3\,\alpha\cos^2\theta+3\,\omega^2\cos\theta\, sen\theta-\frac{6}{L}g\, sen\theta-3\alpha\, sen^2\theta-3\,\omega^2\cos\theta\, sen\theta$$

$$\alpha(1+3\cos^2\theta+3\, sen^2\theta)=\frac{6}{L}g\, sen\theta$$

$$\alpha(1+3)=\frac{6}{L}g\, sen\theta$$

$$\alpha=\frac{3}{2}\frac{g}{L}sen\,\theta$$

Planteamiento energético:

Planteamos la conservación de energía mecánica entre el instante inicial y cualquier instante

$$E_{m\,inicial\,\theta_0}=E_{m\,cualquier\,\theta}$$

$$M\,g\,h_0=M\,g\,h+\frac{1}{2}M\,v_{CM}^2+\frac{1}{2}I\,\omega^2$$

$$\cancel{M}\,g\frac{L}{2}\cos\theta_0=\cancel{M}\,g\frac{L}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\cancel{M}\,v_{CM}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}\cancel{M}\,L^2\omega^2$$

α como segunda derivada de expresiones donde aparezca θ.

Necesitamos expresar v_{CM} en función de θ; podemos plantear la velocidad como suma de componentes v_x y v_y, que podemos relacionar con posiciones y ángulos.

$$v_{CM}^2=v_{CMx}^2+v_{CMy}^2=\left(\frac{L}{2}\omega\cos\theta\right)^2+\left(\frac{L}{2}\omega\, sen\theta\right)^2=\frac{L^2}{4}\omega^2(\cos^2\theta+sen^2\theta)=\frac{L^2}{4}\omega^2$$

Sustituyendo

$$g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\cos\theta_0=g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\cos\theta+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{L^{\cancel{2}}}{4}\omega^2+\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{12}L^{\cancel{2}}\omega^2$$

$$\omega^2 L\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=g(\cos\theta_0-\cos\theta)$$

$$\omega^2=3\frac{g}{L}(\cos\theta_0-\cos\theta)$$

Derivando respecto al tiempo

$$2\cancel{\omega}\alpha=3\frac{g}{L}sen\theta\cancel{\omega}\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\frac{g}{L}sen\,\theta$$