Model 2
1. Una corda homogènia i de secció constant, amb una massa per unitat de longitud λ = 100 g m^{-1}, es troba enrotllada a terra.
a) Calculeu el treball necessari per aixecar verticalment un tros de corda d'1 m de longitud.
b) Quina serà la variació d'energia potencial de la corda quan la longitud de la corda en suspensió passa d'1 m a 2 m?
c) Si s'aixeca l'extrem de la corda anterior, verticalment i a velocitat constant de 0,5 ms^{-1}, trobeu l'expressió que dóna la força necessaria en funció de la distància de l'extrem de la corda sobre la terra.

Modelo 2
1. Una cuerda homogénea y de sección constante, con una masa por unidad de longitud λ = 100 g m^{-1}, se encuentra enrollada en el suelo.
a) Calcule el trabajo necesario para levantar verticalmente un trozo de cuerda de 1 m de longitud.
b) ¿Cuál será la variación de energía potencial de la cuerda cuando la longitud de la cuerda en suspensión pasa de 1 m a 2 m?
c) Si se levanta el extremo de la cuerda anterior, verticalmente y a velocidad constante de 0,5 ms^{-1}, encuentra la expresión que da la fuerza necesaria en función de la distancia del extremo de la cuerda sobre la tierra .

Referencias:
- *http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/variable1/variable1.htm*
- *Enunciado 27 de http://www4.uva.es/goya/Intranet/Pages/SelProblema.asp?p_Tema=7&p_Cuestion=0 con resolución en http://www4.uva.es/goya/Intranet/Pages/Resolucion.asp?p_Problema=243 (aunque se comenta más adelante que considero que tiene un error)*

a) Se puede plantear de varias maneras:
1. Calculamos el diferencial de trabajo, que supone subir cada dx realizando una fuerza que depende de x, ya que cada dx que subimos la masa vertical y la fuerza a realizar aumenta
$$dW=F\cdot dx=mg\cdot dx=\lambda x g\,dx$$
También se puede llegar a la misma expresión viéndolo como subir cada diferencial de masa a una altura que varía entre el suelo y el punto más alto.
$$\lambda=\frac{dm}{dx}\Rightarrow dm=\lambda\,dx$$
$$dW=dF\cdot x=dm\,g\,x=\lambda\,g\,x\,dx$$
Integrando
$$W=\int_0^1 dW=\int_0^1 \lambda\,g\,x\,dx=\lambda\,g\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\lambda\frac{g}{2}=0{,}1\cdot\frac{9{,}8}{2}=0{,}49\,J$$
2. Calculamos la masa y el centro de masas del tramo de cuerda vertical, y calculamos el trabajo asumiendo toda la cuerda en ese punto.
La masa de 1 m de cuerda es 0,1 kg, y su centro de masas está a 0,5 m de altura.
El trabajo asociado a subir 0,1 kg una altura de 0,5 m es 0,1·9,8·0,5=0,49 J
b) Tomamos referencia de energía potencial en el suelo, por lo que el tramo vertical es el único que tiene energía potencial.
El valor de energía potencial de 1 m de cuerda vertical es el calculado en a (la energía potencial está asociada al trabajo externo al campo de llevar un cuerpo desde la referencia a ese punto) y para 2 m

no tiene por qué ser el doble.
La masa de 2 m de cuerda es 0,2 kg, y su centro de masas está a 1 m de altura.
El trabajo asociado a subir 0,2 kg una altura de 1 m es 0,2·9,8·1=1,96 J
La diferencia será, tomando los 2 m como posición final, 1,96-0,49=1,47 J (positiva, gana energía)
c) La derivada del momento lineal de la masa de la cadena vertical respecto al tiempo es igual a la fuerza neta aplicada, que es igual a la fuerza vertical aplicada menos el peso de la cadena.

$$\frac{dp}{dt}=F_{neta}$$

$$\frac{d(masa_{vertical}\, v_{vertical\,CM})}{dt}=F-m_{vertical}\,g$$

$$\frac{d(\lambda\, x\, v_{vertical\,CM})}{dt}=F-\lambda\, x\, g$$

La $v_{vertical\ CM}$ y la masa por unidad de longitud son constantes, y dx/dt=$v_{vertical\ extremo}$, por lo que tenemos

$$\lambda\, v_{vertical\,CM}\cdot v_{vertical\,extremo}=F-\lambda\, x\, g$$

$$F=\lambda(v_{vertical\,CM}\cdot v_{vertical\,extremo}-x\,g)$$

(En la resolución de http://www4.uva.es/goya/Intranet/Pages/Resolucion.asp?p_Problema=243 se consideran ambas velocidades iguales en la solución, pero no considero correcto)
Pero enunciado indica que $v_{vertical\ extremo}$ es la velocidad del "extremo de la cuerda"; el planteamiento dinámico realizado es para el centro de masas del tramo de cuerda vertical, se utiliza la masa vertical y se debe usar la velocidad del centro de masas. Si el extremo de la cuerda lleva una velocidad constante de v=$v_{vertical\ extremo}$, el centro de masas lleva la mitad de velocidad; cuando el extremo esté a x m, el centro de masas ha recorrido x/2 m. $c_{vertical\ CM}$=v/2.

$$F=\lambda\left(\frac{v^2}{2}+xg\right)$$

Validaciones físicas:
-A medida que crece x aumenta la masa y aumenta F
-Si v=0, F=λxg, es la fuerza asociada a la masa vertical.
-Si g=0, F=λv^2/2, expresión similar a de la energía cinética, pero cambiando m por λ; el trabajo asociado a que una masa λx tenga una velocidad es ½ λx v^2, y si igualamos eso al trabajo asociado a una fuerza constante realizada durante una distancia x, llegamos a $F\cancel{x}=\frac{1}{2}\lambda\cancel{x}v^2$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$F=0{,}1\left(\frac{0{,}5^2}{2}+9{,}8x\right)=0{,}0125+0{,}98x\,[F\ en\,N\ ,x\ en\,m]$$