



Model 1

3. Un mol de gas ideal, inicialment a 100 °C, descriu reversiblement el següent cicle: el gas s'expandeix isotèrmicament fins un volum doble de l'inicial i continua expandint-se adiabàticament fins un volum triple de l'inicial; després es comprimeix isotèrmicament fins un volum en què per la compressió adiabàtica que seguix torna el gas al seu estat inicial. Calculeu el calor, el treball, la variació d'energia interna i la variació d'entalpia per cada etapa i per al cicle complet. ( $C_v=5/2 R$ ;  $R=8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ )

Modelo 1

3. Un mol de gas ideal, inicialmente a 100 °C, describe reversiblemente el siguiente ciclo: el gas se expande isotérmicamente hasta un volumen doble del inicial y continúa expandiéndose adiabáticamente hasta un volumen triple del inicial; luego se comprime isotérmicamente hasta un volumen en el que por la compresión adiabática que sigue vuelve el gas a su estado inicial. Calcular el calor, el trabajo, la variación de energía interna y la variación de entalpía para cada etapa y para el ciclo completo. ( $C_v = 5/2 R$ ;  $R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ )

**Este problema es idéntico (salvo alguna palabra del enunciado, a Valencia 2009-1)**

Similar a 2016-Andalucía-F2, en el que el ciclo se recorre en otro sentido

Referencias: <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/estadistica/carnot/carnot.htm>

<http://acerforestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/termo1p/primerpisot.html>

<http://acerforestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/termo1p/primerpadiab.html>

[http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ciclo\\_de\\_Carnot](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ciclo_de_Carnot)

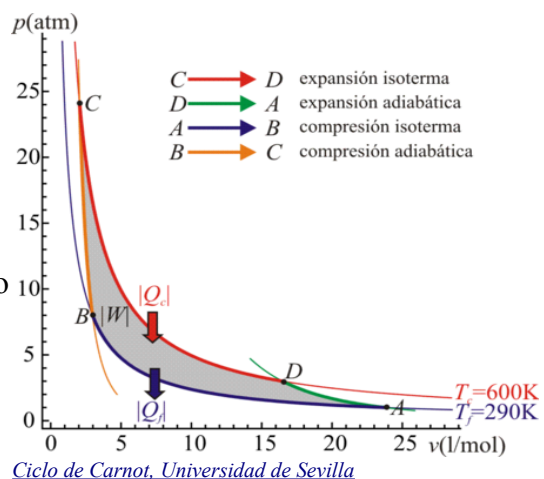
**En general en problemas de termodinámica debemos comenzar dejando claro el convenio de signos usado: se utiliza el convenio IUPAC según el cual la primera ley es  $\Delta U=Q+W$ ,  $Q>0$  y  $W>0$  son aportados al sistema (no se utiliza el convenio Clausius según el cual es  $\Delta U=Q-W$ )**

La secuencia descrita es un ciclo de Carnot, por lo que se hace un tratamiento general como repaso, y se incluye un diagrama de referencia. Llamamos a los puntos en la secuencia del enunciado a,b,c y d (C,D,A y B en el diagrama) y a los tramos 1, 2, 3 y 4. Calculamos P, V y T en cada uno de los puntos, para 1 mol de gas ideal (relativos a los iniciales, no conocemos  $P_a$  ni  $V_a$  inicial, los valores del diagrama no están asociados a este problema)

Para los puntos a y b (C y D en diagrama)

$$T_a = T_b = 273 + 100 = 373 \text{ K} \quad \text{Es el foco caliente.}$$

$$V_b = 2 V_a \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{P_a}{P_b} = 2 \quad P_b = \frac{P_a}{2}$$



Relacionando b y c por ser adiabática (D y A en el diagrama)  $P_b V_b^\gamma = P_c V_c^\gamma \Rightarrow P_c = P_b \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^\gamma$

Como  $C_p=C_v+R=5/2R+R= 7/2R$   $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7/2R}{5/2R} = \frac{7}{5} = 1,4$  Asociado a gas diatómico ideal

$$V_c = 3 V_a = \frac{3}{2} V_b \Rightarrow \frac{V_c}{V_b} = \frac{3}{2} \quad P_c = \frac{P_a}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{1,4}$$



$$T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} \Rightarrow T_c = T_b \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{\gamma-1} = 373 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0,4} = 317 K \quad (\text{temperatura inferior, es el foco frío})$$

Relacionando c y d (A y B en diagrama) por ser isoterma  $P_c V_c = P_d V_d = nRT_c \Rightarrow \frac{P_c}{P_d} = \frac{V_d}{V_c}$

Relacionando d y a (B y C en diagrama) por ser adiabática  $P_d V_d^\gamma = P_a V_a^\gamma \Rightarrow P_d = P_a \left(\frac{V_a}{V_d}\right)^\gamma$

$$\text{Combinamos} \quad V_d = 3 V_a \frac{P_c}{P_d} = 3 V_a \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{1,4} P_a}{P_a \left(\frac{V_a}{V_d}\right)^{1,4}} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{1,4} V_a \frac{V_d^{1,4}}{V_a^{1,4}} \Rightarrow \frac{V_d}{V_d^{1,4}} = \frac{3/2}{\left(3/2\right)^{1,4}} \frac{V_a}{V_a^{1,4}} \Rightarrow V_d = \frac{3}{2} V_a$$

Se llega una expresión que podría haber recordado y planteado sin demostrar  $\frac{V_d}{V_a} = \frac{V_c}{V_b}$

Calculamos para cada tramo:

**Tramo 1 (a → b): expansión isotérmica**

$\Delta U=0$  (la energía interna es una función de estado, no varía si no varía la temperatura cuando se trata de un gas en el que no ha habido cambio de estado)

$W = -nRT \ln(V_f/V_i) = -1 \cdot 8,31 \cdot 373 \cdot \ln(2) = -2148,5 \text{ J}$  (negativo, W realizado por el gas, se expande)

$Q = -W = 2148,5 \text{ J}$  (calor aportado, si se expande a misma T, hay que aportar calor)

$\Delta H=0$  (entalpía es también una función de estado)

**Tramo 2 (b → c): expansión adiabática**

$Q=0 \rightarrow \Delta U=W$

$\Delta U = nC_v \Delta T = 1 \cdot (5/2) \cdot 8,31 \cdot (317-373) = -1163 \text{ J}$

Se puede calcular el trabajo por ser un proceso adiabático  $PV^\gamma = cte$

$$W = - \int_{V_b}^{V_c} P dV = - \int_{V_b}^{V_c} \frac{cte}{V^\gamma} dV = \frac{1}{\gamma-1} \left( \frac{P_c \cdot V_c^\gamma}{V_c^{\gamma-1}} - \frac{P_b \cdot V_b^\gamma}{V_b^{\gamma-1}} \right) = \frac{1}{\gamma-1} (P_c \cdot V_c - P_b \cdot V_b)$$

Aunque no lo parezca, esa expresión es equivalente a  $\Delta U = nC_v \Delta T$

$$W = \frac{1}{C_p/C_v - 1} (nRT_c - nRT_b) = \frac{C_v}{C_p - C_v} nR \Delta T = \frac{C_v}{R} nR \Delta T = nC_v \Delta T$$

Comprobamos que valores numéricos coinciden, lo que valida valores P y V obtenidos

$$W = \frac{1}{1,4-1} \left( \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{1,4} P_a 3V_a - P_b \cdot V_b \right) \quad P_a V_a = P_b V_b = nRT_a = 1 \cdot 8,31 \cdot 373 = 3100 \text{ J}$$

$$W = \frac{1}{1,4-1} (0,85 - 1) 3100 = -1163 \text{ J} \quad \text{Negativo, expansión, lo realiza sistema}$$

$\Delta H = nC_p \Delta T = 1 \cdot (7/2) \cdot 8,31 \cdot (317-373) = -1629 \text{ J}$

**Tramo 3 (c → d): compresión isotérmica**

$W = -nRT \ln(V_f/V_i) = -1 \cdot 8,31 \cdot 317 \cdot \ln((3/2)/3) = 1826 \text{ J}$  (positivo, W realizado, se comprime)

$\Delta U=0 \rightarrow Q = -W = -1826 \text{ J}$  (calor liberado, si se comprime a misma T, libera calor)

$\Delta H=0$  (entalpía es también una función de estado)

**Tramo 4 (d → a): compresión adiabática**

$Q=0 \rightarrow \Delta U=W$

$\Delta U = nC_v \Delta T = 1 \cdot (5/2) \cdot 8,31 \cdot (373-317) = 1163 \text{ J}$  (se podría repetir la comprobación con W)

Positivo, W realizado, se comprime

$\Delta H = nC_p \Delta T = 1 \cdot (7/2) \cdot 8,31 \cdot (373-317) = 1629 \text{ J}$

En el ciclo completo:

$\Delta U=0, \Delta H=0$  (son una función de estado, volvemos a las mismas condiciones)

Lo podemos comprobar (salvo redondeo):  $\Delta U = -1163 + 1163 = 0 \text{ J}, \Delta H = -1629 + 1629 = 0 \text{ J}$



$$Q=2148,5+0-1826+0=323 \text{ J}$$

$$W=-2148,5-1163+1826+1163 =-323 \text{ J}$$

>Como  $\Delta U=Q+W$ , si globalmente  $\Delta U=0$  se tiene que cumplir que globalmente  $Q=-W$ )

>El trabajo total del ciclo se puede obtener como la suma de trabajos en los tramos isotermos, ya que los trabajos en las transformaciones adiabáticas son iguales y opuestos, por lo que se puede usar la expresión

$$W=nR (T_1-T_2) \ln(V_a/V_b)=1 \cdot 8,31(373-317) \cdot \ln(0,5)=-323 \text{ J}$$