Model 1

1. Suposseu la Terra esfèrica de radi R_0=6400 km, homogènia i amb una acceleració de la gravetat a la superfície g_0=9,8 m s^{-2}.

a) Calculeu la profunditat, seguint un diàmetre, que hauria de tenir un pou perquè el pes d'un cos situat al seu fons fos el mateix que el que tindria a una altura de 200 km sobre la superfície de la Terra.

b) Des de la superfície de la Terra es deixa caure una pedra al pou anterior. Trobeu el temps que tardarà en arribar al fons.

c) Calculeu també la velocitat i l'acceleració amb què la pedra arribarà al fons del pou.

Modelo 1

1. Suponga la Tierra esférica de radio R_0 = 6400 km, homogénea y con una aceleración de la gravedad en la superficie g_0 = 9,8 m s^{-2}.

a) Calcule la profundidad, siguiendo un diámetro, que debería tener un pozo para que el peso de un cuerpo situado a su fondo fuera el mismo que el que tendría una altura de 200 km sobre la superficie de la Tierra.

b) Desde la superficie de la Tierra se deja caer una piedra en el pozo anterior. Encuentre el tiempo que tardará en llegar al fondo.

c) Calcule también la velocidad y la aceleración con la que la piedra llegará al fondo del pozo.

Referencias:
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste/gravedad1/gravedad1.htm
http://www.fiquipedia.es/home/recursos/ejercicios/ejercicios-elaboracion-propia-fisica-2-bachillerato/ProblemaRepasoGravitacionMas.pdf?attredirects=0

a) Para que el peso sea el mismo en dos puntos, siendo constante la masa, la aceleración de la gravedad debe ser la misma en ambos puntos.
Aplicando la ley de Gauss al campo gravitatorio, se puede comprobar que el campo gravitatorio:
-En el interior varía linealmente con el radio, desde g=0 en el centro hasta g_0 en la superficie.
-En el exterior el campo es el mismo que el de una masa puntual situada en el centro de la Tierra

$$g_{interior}=g_{exterior}$$

$$\frac{r}{R_0}g_0=G\frac{M_T}{(R_0+h)^2}$$

No se nos da explícitamente G ni M_T, pero podemos expresar el valor de su producto en función de los datos $g_0=G\frac{M_T}{R_0^2}\Rightarrow GM_T=g_0\cdot R_0^2$

Sustituyendo $\frac{r}{R_0}\cancel{g_0}=\cancel{g_0}\cdot\frac{R_0^2}{(R_0+h)^2}\Rightarrow r=\frac{R_0^3}{(R_0+h)^2}=\frac{(6400\cdot 10^3)^3}{(6400\cdot 10^3+200\cdot 10^3)}=6{,}018\cdot 10^6 m$

La profundidad del pozo es $6{,}4\cdot 10^6-6{,}018\cdot 10^6=3{,}82\cdot 10^5$ m = 382 km

b) La aceleración no es constante en todo el pozo, por lo que no se pude calcular como un MRUA. Tomamos sistema de referencia con x=0 en el centro de la Tierra, valores positivos de modo que en la entrada en el pozo x=+R_0, con lo que en el interior del pozo tendremos fuerzas recuperadoras y F=ma=-kx, por lo que se trata de un movimiento armónico simple, en el que tenemos

$$a=-\omega^2 x\Rightarrow\frac{g_0}{R_0}=\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{g_0}{R_0}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{6{,}4\cdot 10^6}}=1{,}24\cdot 10^{-3} rad/s$$

Nos pregunta en qué instante la elongación tiene cierto valor, para lo que planteamos el movimiento

como $x(t)=A\cos(\omega t)=6{,}4\cdot 10^{6}\cos(1{,}24\cdot 10^{-3}t)[t\, en\, s, x\, en\, m]$, de modo que para t=0 x=A=R_0.
En el fondo del pozo

$$6{,}018\cdot 10^{6}=6{,}4\cdot 10^{6}\cos(1{,}24\cdot 10^{-3}t)\Rightarrow 1{,}24\cdot 10^{-3}t=arcos\frac{6{,}018\cdot 10^{6}}{6{,}4\cdot 10^{6}}\Rightarrow t=\frac{0{,}347}{1{,}24\cdot 10^{-3}}\approx 280\, s$$

c) Usamos la expresión de velocidad en función de la elongación para un movimiento armónico simple $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$.
En este caso sabemos que la velocidad es negativa

$$v_{fondo}=\omega\sqrt{R_0^2-R_{fondo}^2}=-1{,}24\cdot 10^{-3}\sqrt{(6{,}4\cdot 10^{6})^2-(6{,}018\cdot 10^{6})^2}=-2700\, m/s$$

La aceleración asociada a esa distancia es

$$a_{fondo}=\frac{-r_{fondo}}{R_0}g_0=\frac{-6{,}018\cdot 10^{6}}{6{,}4\cdot 10^{6}}\cdot 9{,}8\approx -9{,}2\, m/s^2$$