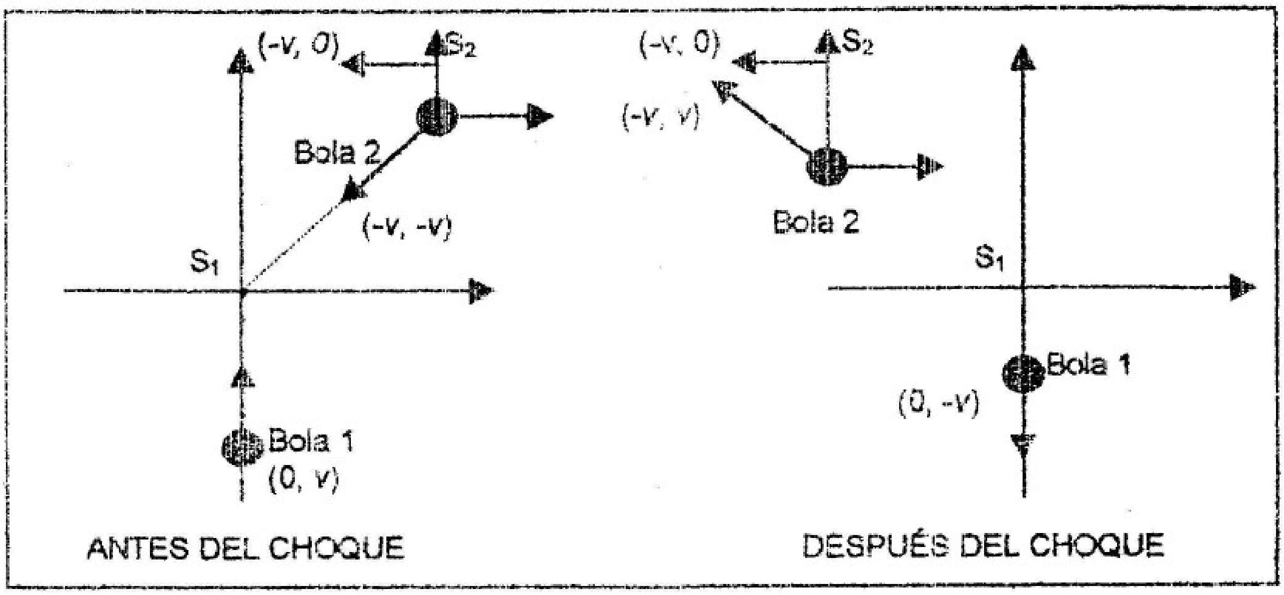
1 PROBLEMAS DE FÍSICA

1.3. Estudiar el choque elástico y central de dos bolas de igual masa M, que se dirigen la una hacia la otra sobre el plano OXY con velocidades $\vec{v_{2a}}=(-v,-v)$; $\vec{v_{1a}}=(0,v)$, referidas ambas al sistema S_1 en reposo relativo. (Ver figura)

a) Comprobar que en S_1 el momento lineal se conserva desde el punto de vista de la dinámica clásica.

b) Si consideramos la bola 1 asociada a S_1 y la bola 2 asociada a S_2, comprobar que las transformaciones de Lorentz para la velocidad no garantizan la conservación del momento lineal, en la suposición de que éste se defina como $\vec{p}=M\vec{v}$.

c) Comprobar que las transformaciones de Lorentz para la velocidad garantizan la conservación de la cantidad de movimiento, cuando ésta se define de acuerdo con $\vec{p}=\frac{M}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\vec{v}$.



Referencias:
Comentado por sleepylavoisier en http://www.docentesconeducacion.es/viewtopic.php?f=92&t=4239#p18332 citando sección 39.6 Momento Lineal Relativista de Tipler.
https://sites.google.com/site/jvilchesp/fisica/sistemas/si860
https://en.wikipedia.org/wiki/Velocity-addition_formula
http://physics.cos.ucf.edu/main/wp-content/uploads/2012/05/Relativity-4.pptx
http://isites.harvard.edu/fs/docs/icb.topic1145127.files/Scanned%20topic%209.pdf
http://readingfeynman.org/tag/relativistic-momentum/
https://en.wikibooks.org/wiki/Special_Relativity/Dynamics

a) La expresión general es $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$, y si durante el coque las fuerzas externas son nulas, se llega a la conservación del momento lineal, $\vec{p_{antes}}=\vec{p_{después}}$

Desde el punto de vista de la dinámica clásica $\vec{p}=m\vec{v}$ y planteamos, usando subíndice a para antes (como hace el enunciado) y d para después, y tomando los valores de después del diagrama (los valores de antes están duplicados en enunciado y diagrama)

Para S_1:

$m_1\cdot v_{1ax}+m_2\cdot v_{2ax}=m_1\cdot v_{1dx}+m_2\cdot v_{2dx}\Rightarrow M\cdot 0+M\cdot(-v)=M\cdot 0+M\cdot(-v)$ Sí se conserva

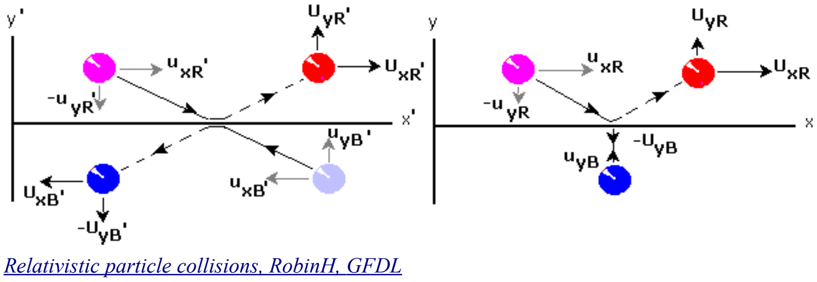
$m_1 \cdot v_{1ay} + m_2 \cdot v_{2ay} = m_1 \cdot v_{1dy} + m_2 \cdot v_{2dy} \Rightarrow M \cdot v + M \cdot (-v) = M \cdot (-v) + M \cdot v$ Sí se conserva

>Una manera alternativa de verlo en este caso en el que las masas son iguales, en lugar de partir de la conservación de momento es llegar a ella: podemos plantear con los valores dados que $\vec{v_{1antes}} + \vec{v_{2antes}} = \vec{v_{1después}} + \vec{v_{2después}} = (0-v, v-v) = (0-v, -v+v) = (-v, 0)$ *que multiplicando por M en ambos lados y usando la definición clásica de momento se convierte en* $\vec{p_{antes}} = \vec{p_{después}}$ *que es lo que se pide demostrar.*

b) Planteamos primero las transformaciones de Lorentz para las velocidades, usando las expresiones asociadas a que el eje x y x' de los sistemas S_1 y S_2 son paralelos.
La velocidad en el eje y también se modifica aunque no haya velocidad relativa entre sistemas, porque la velocidad depende del tiempo que varía entre los sistemas.

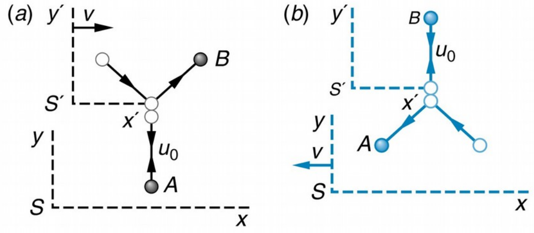
$$\beta = \frac{v}{c} ; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} ; v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)}$$

En las expresiones v indica velocidad relativa entre sistemas, y v_x y v_y son las velocidades medidas respecto S_1, siendo las velocidades ' las velocidades medidas desde S_2.
En el diagrama parece que S_2 está ligado a la bola 2, con lo que las velocidades de la bola 2 medidas desde ese sistema serían nulas, pero al mismo tiempo "se indica/se interpreta" (-v,0) como velocidad del sistema S_2; nos quedamos con ese dato, con lo que S_2 no está ligado a la bola 2, y la bola 2 sí tiene velocidad respecto de ese sistema S_2.
La frase del enunciado **"la bola 2 asociada a S_2"** no es clara; se puede interpretar de dos maneras:
1. Ahora la velocidad dada $\vec{v_{2a}} = (-v, -v)$ no es la velocidad respecto S_1 sino medida desde S_2,
2. Ahora la velocidad x de la bola 2 y la velocidad de S_2 coinciden medidas desde S_1, con lo que la velocidad x de la bola 2 medida desde S_2 es nula y la única velocidad que tiene la bola 2 medida desde S_2 sería en eje y. No podemos decir en general esas velocidades de bola 2 sean ahora (0,-v) antes y (0,v) después, ya que enunciado para bola 2 solamente indica (-v,v), y aunque aparezca S_2 dibujado sobre la bola 2, que v_y no varía al cambiar de sistema estaría usando adición de velocidades que no es válida al citar la transformación de Lorentz.
Hay ejemplos de "colisión relativista típica de dos partículas", se incluyen unos diagramas sin retocar en los que los sentidos respecto a eje x están invertidos respecto a la situación del enunciado de este problema.
La opción 1 sería similar a este diagrama, donde la situación de la derecha sería análogo a verlo desde S_1 donde la bola B (blue) sería la bola 1, y la bola R (red) la bola 2. La situación de la izquierda sería análogo a verlo desde S_2 donde la bola 1 que antes no tenía movimiento en eje x sí lo tiene ahora, teniendo ambas bolas movimientos opuestos. Las U simbolizan después y las u antes.



Relativistic particle collisions, RobinH, GFDL

La opción 2 sería similar a este diagrama (similar a Tipler pero ahí tiene derechos de autor), donde en ambas situaciones se asume que una de las dos bolas no tiene componente x.



University of Central Florida, *"Relativistic Momentum"*

La opción 2 es la que se puede ver resuelta en Tipler, y cuadra en cierto modo con reutilizar el apartado a donde se sabía que en el eje y por conservación la suma de momentos debe ser cero.
La opción 2 supone fijar valores para velocidades respecto a cada sistema por separado, y no se

tiene por qué cumplir que la suma de momentos en el eje y sea cero. Sin plantearlo relativista, se tendría que respecto S_2 tenemos antes $v_B(-v,-v)$ y v_A (v,v) y después $v_B(-v,v)$ y $v_A(v,-v)$, por lo que sí sigue siendo cero en el eje y.
Optamos por la 1 para hacer algo distinto a Tipler: la velocidad dada $\vec{v_{2a}}=(-v,-v)$ es ahora respecto a S_2.
Con estas expresiones calculamos las velocidades de la bola 1 asociadas a S_2 ya que para la bola 2 ya las tenemos respecto a S_2

$$v_{1axS2}=\frac{v_{1axS1}-v_{xS2S1}}{1-\frac{\beta}{c}v_{1axS1}}=\frac{0-(-v)}{1-\frac{\beta}{c}0}=v \qquad v_{1dxS2}=\frac{v_{1dxS1}-v_{xS2S1}}{1-\frac{\beta}{c}v_{1dxS1}}=\frac{0-(-v)}{1-\frac{\beta}{c}0}=v$$

$$v_{1ayS2}=\frac{v_{1ayS1}}{\gamma_{sist}(1-\frac{\beta}{c}v_{1axS1})}=\frac{v}{\gamma_{sist}(1-\frac{\beta}{c}0)}=\frac{v}{\gamma_{sist}} \qquad v_{1dyS2}=\frac{v_{1dyS1}}{\gamma_{sist}(1-\frac{\beta}{c}v_{1dxS1})}=\frac{-v}{\gamma_{sist}(1-\frac{\beta}{c}0)}=\frac{-v}{\gamma_{sist}}$$

>Es importante con confundirse; aquí v es tanto el valor de velocidad entre sistemas de referencia como el valor de velocidad de las partículas respecto a su sistema de referencia, pero ambos valores no tienen por qué coincidir ni se ponen en los mismos sitios en las expresiones (en algunos desarrollos se usa u y v para distinguirlas). El valor de γ tiene v en su fórmula, y en la transformada de velocidad hace referencia a la v entre sistemas, por lo que tiene en este caso tiene un valor fijado "v" que se mantiene antes y después, pero cuando se habla de la expresión de momento relativista en γ se usa la velocidad respecto al único sistema que manejemos.
Usamos γ asociado a la velocidad respecto del sistema y γ_{sist} asociado a la velocidad entre sistemas.
Para S_2 y la definición clásica de momento lineal $\vec{p}=M\vec{v}$:

$m_1\cdot v_{1ax}+m_2\cdot v_{2ax}=m_1\cdot v_{1dx}+m_2\cdot v_{2dx}\Rightarrow M\cdot v+M\cdot(-v)=M\cdot v+M\cdot(-v)$ En el eje x sí se conserva

$$m_1\cdot v_{1ay}+m_2\cdot v_{2ay}=m_1\cdot v_{1dy}+m_2\cdot v_{2dy}\Rightarrow M\cdot\frac{v}{\gamma_{sist}}+M\cdot(-v)=M\cdot(\frac{-v}{\gamma_{sist}})+M\cdot v$$

En el eje y no se conserva
>Una manera alternativa de verlo en este caso similar al apartado a, en el que las masas son iguales, en lugar de partir de la conservación de momento es llegar a ella: podemos plantear con los valores dados $\vec{v_{1antes}}+\vec{v_{2antes}}\neq\vec{v_{1después}}+\vec{v_{2después}}\Rightarrow(v-v,\frac{v}{\gamma_{sist}}-v)\neq(-v+v,-\frac{v}{\gamma_{sist}}+v)$ *que multiplicando por M en ambos lados y usando la definición clásica de momento se convierte en* $\vec{p_{antes}}\neq\vec{p_{después}}$ *que es lo que se pide demostrar.*
c) Ahora planteamos para S_2 y la nueva definición de momento lineal $\vec{p}=\gamma M\vec{v}$
El módulo de velocidad de la bola 1 respecto de S_2 es

$$v_{1a}=\sqrt{v_{1ax}^2+v_{1ay}^2}=\sqrt{v^2+\frac{v^2}{\gamma_{sist}^2}}=\sqrt{v^2(\frac{\gamma_{sist}^2+1}{\gamma_{sist}^2})}=v\sqrt{\frac{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}+1}{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}}=v\sqrt{\frac{\frac{c^2+c^2-v^2}{c^2-v^2}}{\frac{c^2}{c^2-v^2}}}=\frac{v}{c}\sqrt{2c^2-v^2}$$

$$v_{1d}=\sqrt{v_{1dx}^2+v_{1dy}^2}=...=v_{1a}=\frac{v}{c}\sqrt{2c^2-v^2}$$

$$\gamma_{1a}=\gamma_{1d}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^4}(2c^2-v^2)}}=\frac{c^2}{\sqrt{c^4-2c^2v^2+v^4}}=\frac{c^2}{\sqrt{(c^2-v^2)^2}}=\frac{c^2}{c^2-v^2}=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\gamma_{sist}^2$$

$$v_{2a}=v_{2d}=\sqrt{v_{2ax}^2+v_{2ay}^2}=\sqrt{2}v$$

$$\gamma_{2a}=\gamma_{2d}=\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{c^2-2v^2}{c^2}}}=\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}$$

$$\gamma_{1a}\cdot m_1\cdot v_{1ax}+\gamma_{2a}\cdot m_2\cdot v_{2ax}=\gamma_{1d}\cdot m_1\cdot v_{1dx}+\gamma_{2d}\cdot m_2\cdot v_{2dx}$$

$$\gamma_{1a}\cdot M\cdot v+\gamma_{2a}\cdot M\cdot(-v)=\gamma_{1d}\cdot M\cdot v+\gamma_{2d}\cdot M\cdot(-v)$$

En el eje x de nuevo sí se conserva (lo hemos repetido para eje x aunque ya se conservaba) .

$$\gamma_{1a}\cdot m_1\cdot v_{1ay}+\gamma_{2a}\cdot m_2\cdot v_{2ay}=\gamma_{1d}\cdot m_1\cdot v_{1dy}+\gamma_{2d}\cdot m_2\cdot v_{2dy}$$

$$\gamma_{sist}^{\cancel{2}}\frac{\cancel{M}\cancel{v}}{\cancel{\gamma_{sist}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}\cancel{M}(-\cancel{v})=\gamma_{sist}^{\cancel{2}}\cancel{M}\frac{(-\cancel{v})}{\cancel{\gamma_{sist}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}\cancel{M}\cancel{v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\cancel{2}\frac{c}{\sqrt{c^2-2v^2}}$$

$$\frac{c^2}{c^2-v^2}=\frac{c^2}{c^2-2v^2}$$

No se conserva en el eje y, cualitativamente se ve que es porque hemos forzado $v_{2a}=v_{2d}=\sqrt{2}v$, lo que hace que la interpretación 1 no sea válida.
Si usamos la interpretación 1, $\vec{v_{2a}}=(0,-v)$ y $\vec{v_{2d}}=(0,v)$
El desarrollo es idéntico para la bola 1, y para la bola 2 ahora tenemos $v_{2a}=v_{2d}=v$

Ahora tendríamos $\gamma_{2a}=\gamma_{2d}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\gamma_{sist}$

Planteando ahora la conservación en el eje y obtenemos que el momento es cero en ambos casos y se conserva.

$$\gamma_{1a}\cdot m_1\cdot v_{1ay}+\gamma_{2a}\cdot m_2\cdot v_{2ay}=\gamma_{1d}\cdot m_1\cdot v_{1dy}+\gamma_{2d}\cdot m_2\cdot v_{2dy}$$

$$\gamma_{sist}^{\cancel{2}}\frac{\cancel{M}\cancel{v}}{\cancel{\gamma_{sist}}}+\gamma_{sist}\cancel{M}(-\cancel{v})=\gamma_{sist}^{\cancel{2}}\cancel{M}\frac{(-\cancel{v})}{\cancel{\gamma_{sist}}}+\gamma_{sist}\cancel{M}\cancel{v}$$

$$\gamma_{sist}-\gamma_{sist}=-\gamma_{sist}+\gamma_{sist}$$